

28.Γ1

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2} & \stackrel{\text{προσθαφαίρουµε } xf(x)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - xf(x) + xf(x) - 2f(x)}{x-2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x[f(x) - f(2)] + f(x)(x-2)}{x-2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x[f(x) - f(2)]}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(x-2)}{x-2} = \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2) \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \stackrel{\substack{f \text{ παραγωγίσιμη} \\ \text{άρα συνεχής στο } x_0=2}}{=} f(2) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} (-x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \boxed{-2f'(2) + f(2)}
 \end{aligned}$$

28.Γ2

α) Η f , έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 3]$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

$$\text{Η } f' \text{ μηδενίζεται στο } x_0 = -1 \text{ με } f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 1 = 1$$

$$\text{και στο } x_0 = 1 \text{ με } f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 1 = -3$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \text{ και } f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 - 1 = 17$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία τα ακρότατα της f καθώς και τα όρια της και οι τιμές της στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$+$	$\emptyset$
$f(x)$	$-\infty$	$\boxed{1}$	$\boxed{-3}$	$\boxed{17}$	

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 1]$$

στο διάστημα $A_2 = [-1, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_2) = [f(1), f(-1)] = [-3, 1]$$

στο διάστημα $A_3 = [1, 3]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_3) = [f(1), f(3)] = [-3, 17]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \boxed{(-\infty, 17]}$$

β) iv (τρεις ρίζες μία σε κάθε διάστημα)

28.Γ3

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(e, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων με } f'(x) = \frac{\cancel{x} - \ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \stackrel{x > e \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow 1 - \ln x < 0}{\Rightarrow} f'(x) < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(e, +\infty)$ και προφανώς δεν έχει ακρότατα

$$\beta) e < \alpha < \beta \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f(\alpha) > f(\beta) \Rightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} > \frac{\ln \beta}{\beta} \stackrel{\alpha\beta > 0}{\Rightarrow} \cancel{\alpha}\beta \frac{\ln \alpha}{\cancel{\alpha}} > \alpha \cancel{\beta} \frac{\ln \beta}{\cancel{\beta}} \Rightarrow$$

$$\beta \ln \alpha > \alpha \ln \beta \Rightarrow \ln \alpha^\beta > \ln \beta^\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha^\beta > \beta^\alpha}$$

28.Γ4

α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και

$$g(x) = f(3x) - 3f(x) \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} g'(x) = 3f'(3x) - 3f'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = 3[f'(3x) - f'(x)] \stackrel{\substack{\text{για } x > 0 \Rightarrow 3x > x \\ f \text{ αυστηρή} \Rightarrow f' \uparrow}}{\Rightarrow} f'(3x) > f'(x) \Rightarrow \boxed{g'(x) > 0}$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$x > 0 \stackrel{g \uparrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Rightarrow f(3x) - 3f(x) > f(3 \cdot 0) - 3f(0) \Rightarrow f(3x) - 3f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(3x) > 3f(x) \Rightarrow \boxed{\frac{f(3x)}{3} > f(x)}$$

28.Γ5

α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - e^x - \sin x$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = f'(x) - e^x + \eta \mu x$ (1)

Παρατηρούμε ότι $f(x) \geq e^x + \sin x \Rightarrow f(x) - e^x - \sin x \geq 0 \Rightarrow \boxed{h(x) \geq 0}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ακόμη } \boxed{h(0)} = f(0) - e^0 - \sin 0 \stackrel{f(0)=2}{=} \boxed{0}$$

Επομένως η συνάρτηση h έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$h'(0) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(0) - e^0 + \eta \mu 0 = 0 \Rightarrow f'(0) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(0) = 1}$$

β) Για να βρούμε την ζητούμενη εφαπτόμενη θα χρειαστεί να βρούμε το $g(1)$ και το $g'(1)$

Έχουμε

$$g(x) = f(x^2 - 1) + 2x + 3 \Rightarrow g(1) = f(1^2 - 1) + 2 \cdot 1 + 3 \Rightarrow g(1) = f(0) + 5 \xRightarrow{f(0)=2} \boxed{g(1) = 7}$$

Ακόμη

$$g(x) = f(x^2 - 1) + 2x + 3 \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} g'(x) = 2xf'(x^2 - 1) + 2 \xRightarrow{x=1}$$

$$\Rightarrow g'(1) = 2f'(0) + 2 \xRightarrow{f'(0)=1} \boxed{g'(1) = 4}$$

Οπότε η εφαπτομένη της C_g , στο σημείο της $(1, g(1))$ θα έχει εξίσωση

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \xRightarrow{\substack{g(1)=7 \\ g'(1)=4}} y - 7 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y - 7 = 4x - 4 \Leftrightarrow \boxed{y = 4x + 3}$$

28.Γ6

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 4h) - f(x_0 - 3h)}{h} & \xrightarrow{\text{προσθαφαιρούμε } f(x_0)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 4h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - 3h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 4h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 3h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 4h) - f(x_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{h} = \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 4h) - f(x_0)}{h} = 4f'(x_0) \text{ (επεξήγηση 1)} \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{h} = -3f'(x_0) \text{ (επεξήγηση 2)} \\ & = 4f'(x_0) - [-3f'(x_0)] = \boxed{7f'(x_0)} \end{aligned}$$

επεξήγηση 1

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 4h) - f(x_0)}{h} & \xrightarrow{\substack{\text{θέτουμε } y=4h \Rightarrow h=\frac{y}{4} \\ \text{όταν } h \rightarrow 0, y \rightarrow 0}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + y) - f(x_0)}{\frac{y}{4}} = \\ &= 4 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + y) - f(x_0)}{y} \xrightarrow{\frac{f(x_0 + y) - f(x_0)}{y} = f'(x_0)} = \boxed{4f'(x_0)} \end{aligned}$$

επεξήγηση 2

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{h} & \xrightarrow{\substack{\text{θέτουμε } y=-3h \Rightarrow h=-\frac{y}{3} \\ \text{όταν } h \rightarrow 0, y \rightarrow 0}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + y) - f(x_0)}{-\frac{y}{3}} = \\ &= -3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + y) - f(x_0)}{y} \xrightarrow{\frac{f(x_0 + y) - f(x_0)}{y} = f'(x_0)} = \boxed{-3f'(x_0)} \end{aligned}$$

- α) Επειδή οι ευθείες $y = -2$ και $y = ax$, $a > 0$ είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f θα είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 \\ \text{και} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \end{array} \right. \quad (1) \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \\ \text{και} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \end{array} \right. \quad (2)$$

Όμως

επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα (αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$) και $f(2) = 1$ είναι αδύνατο να ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ και άρα οι σχέσεις (2) δεν μπορούν να ισχύουν

Άρα σίγουρα ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$

Ψάχνουμε τώρα τις ασύμπτωτες της g . Επειδή η g είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών δεν θα έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Έτσι ψάχνουμε μόνο για οριζόντιες και πλάγιες

Στο $-\infty$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10f(x)}{1+f^2(x)} \stackrel{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2}{=} \frac{10(-2)}{1+(-2)^2} = -\frac{20}{5} = \boxed{-4}$$

Άρα η ευθεία $y = -4$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Στο $+\infty$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} \stackrel{\text{διαιρούμε με } x^2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10f(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{f^2(x)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10}{x} \cdot \frac{f(x)}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{f^2(x)}{x^2}} \stackrel{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0}{\frac{0 \cdot \alpha}{0 + \alpha^2}} = \boxed{0}$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \boxed{g'(x)} &= 10 \cdot \frac{f'(x)[1+f^2(x)] - f(x)2f(x)f'(x)}{1+f^2(x)} \\ &= 10 \cdot \frac{f'(x) + f'(x)f^2(x) - 2f^2(x)f'(x)}{1+f^2(x)} = 10 \cdot \frac{f'(x) - f^2(x)f'(x)}{1+f^2(x)} = \\ &= 10 \cdot \frac{f'(x)[1-f^2(x)]}{1+f^2(x)} \stackrel{f(1)=-1}{=} 10 \cdot \frac{f'(x)[1-f(x)][1+f(x)]}{1+f^2(x)} \stackrel{f(2)=1}{=} \end{aligned}$$

$$\boxed{10 \cdot \frac{f'(x)[f(2)-f(x)][f(x)-f(1)]}{1+f^2(x)}}$$

Προφανώς η g' μηδενίζεται για $x = -1$ και για $x = 2$. Επειδή $f'(x) > 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα τα πρόσημα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$					

γ) i) Έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -4$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Ακόμη

$$g(1) = \frac{10f(1)}{1+f^2(1)} \stackrel{f(-1)=-1}{=} \frac{-10}{2} = -5$$

$$g(2) = \frac{10f(2)}{1+f^2(2)} \stackrel{f(2)=1}{=} \frac{10}{2} = 5$$

Έτσι συμπληρώνουμε τον πίνακα του ερωτήματος β) ως εξής

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	-4	-5	5	0	

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$g(A_1) = [g(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)] = [-5, -4)$$

στο διάστημα $A_2 = [1, 2]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$g(A_2) = [g(1), g(2)] = [-5, 5]$$

στο διάστημα $A_3 = [2, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$g(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(2) \right] = (0, 5]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [-5, 5]$$

ii) Θέτοντας $y = g(x)$ η εξίσωση $g^2(x) - g(x) - 6 = 0$ γίνεται

$$y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25, y_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{άρα } g^2(x) - g(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 3 \text{ ή } g(x) = -2$$

Μένει να βρούμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $g(x) = 3$ και πόσες η εξίσωση $g(x) = -2$

Από τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος βλέπουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 3$ έχει 2 ρίζες (μία στο διάστημα $(1, 2)$ και μία στο διάστημα $(2, +\infty)$ ενώ η εξίσωση $g(x) = -2$ έχει μία ρίζα (στο διάστημα $(1, 2)$).
Άρα τελικά η εξίσωση $g^2(x) - g(x) - 6 = 0$ έχει **τρεις ακριβώς ρίζες**

28.Γ8

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(a) = 1$ και $f(\beta) = 3$, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει $\gamma \in [a, \beta]$ με $f(\gamma) = 2$.
Οπότε

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \gamma]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, γ)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (a, \gamma)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} \stackrel{f(a)=1, f(\gamma)=2}{\Rightarrow} f'(\xi_1) = \frac{1}{\gamma - a} \quad (1)$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\gamma, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (γ, β)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} \stackrel{f(\gamma)=2, f(\beta)=3}{\Rightarrow} f'(\xi_2) = \frac{1}{\beta - \gamma} \quad (2)$$

Επομένως υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε

$$\boxed{\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)}} \stackrel{(1),(2)}{=} \cancel{\gamma} - a + \beta - \cancel{\gamma} = \boxed{\beta - a}$$

28.Γ9

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} \boxed{f'(x)} &= \frac{2ax(x^2 + \beta) - 2x(ax^2 + \beta + 1)}{x^2 + \beta} = \\ &= \frac{\cancel{2ax^3} + 2a\beta x - \cancel{2ax^3} - 2\beta x - 2x}{(x^2 + \beta)^2} = \boxed{\frac{2x(\alpha\beta - \beta - 1)}{(x^2 + \beta)^2}} \end{aligned}$$

Η f' μηδενίζεται για $x = 0$ και $f(0) = \frac{\beta^2 + 1}{\beta}$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + \beta + 1}{x^2 + \beta} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta + 1}{x^2 + \beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = \alpha$$

Τώρα

Είναι $\alpha\beta - \beta - 1 \neq 0$ διότι αν ήταν $\alpha\beta - \beta - 1 = 0$ θα ήταν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα η f θα ήταν σταθερή και προφανώς δεν θα είχε σύνολο τιμών το $[2, 7)$

Ακόμη αν είναι $\alpha\beta - \beta - 1 < 0$ τότε τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f καθώς και τα όρια της στα άκρα του πεδίου ορισμού της θα ήταν όπως στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$
$f(x)$	α	$f(0)$	α

Τότε όμως το σύνολο τιμών της f θα ήταν το $(\alpha, f(0)]$ άτοπο

Άρα υποχρεωτικά θα είναι $\alpha\beta - \beta - 1 > 0$ οπότε τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f καθώς και τα όρια της στα άκρα του πεδίου ορισμού της θα είναι

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	α	$f(0)$	α

Με βάση τον παραπάνω πίνακα το σύνολο τιμών της f είναι $[f(0), \alpha)$. Οπότε προκειμένου η f να έχει σύνολο τιμών το $[2, 7)$ θα πρέπει

$$\begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow \frac{f(0) - \beta^2 + 1}{\beta} = 2 \Rightarrow \frac{\beta^2 + 1}{\beta} = 2 \Rightarrow \beta^2 + 1 = 2\beta \Rightarrow \beta^2 - 2\beta + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 1} > 0 \text{ δεκτή} \\ \boxed{\alpha = 7} \end{cases}$$

28.Γ10

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[e, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ για κάθε

$x \in [e, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (e, +\infty)$ είναι

$$\boxed{x > e} \Rightarrow \ln x > \ln e \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow 1 - \ln x < 0 \Rightarrow \boxed{f'(x) < 0}, \text{ που σημαίνει ότι η } f$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$

β) Έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
\pi^{1821} &> \left(1 + \frac{1821}{\pi}\right)^\pi \Leftrightarrow \ln \pi^{1821} > \ln \left(1 + \frac{1821}{\pi}\right)^\pi \Leftrightarrow 1821 \ln \pi > \pi \ln \left(1 + \frac{1821}{\pi}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 1821 \ln \pi > \pi \ln \frac{\pi + 1821}{\pi} \Leftrightarrow 1821 \ln \pi > \pi [\ln(\pi + 1821) - \ln \pi] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 1821 \ln \pi > \pi \ln(\pi + 1821) - \pi \ln \pi \Leftrightarrow 1821 \ln \pi + \pi \ln \pi > \pi \ln(\pi + 1821) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\pi + 1821) \cdot \ln \pi > \pi \cdot \ln(\pi + 1821) \Leftrightarrow \frac{\ln \pi}{\pi} > \frac{\ln(\pi + 1821)}{\pi + 1821} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f(\pi) > f(\pi + 1821) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} \pi < \pi + 1821 \quad \text{που προφανώς ισχύει}
\end{aligned}$$

28.Γ11

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = x^2 + 2\eta\mu x$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $h'(x) = 2x + 2\sigma\upsilon\nu x$ (1)

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση g με $g(x) = 2x + 2\sigma\upsilon\nu x$, $x \geq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $g'(x) = 2 - \eta\mu x \Rightarrow g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$x > 0 \stackrel{g \nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Rightarrow 2x + 2\sigma\upsilon\nu x > 2 \cdot 0 + 2\sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow 2x + 2\sigma\upsilon\nu x > 2 \Rightarrow$$

$2x + 2\sigma\upsilon\nu x > 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{x > 0} \Rightarrow h(x) > h(0) \Rightarrow x^2 + 2\eta\mu x > 0^2 + 2\eta\mu 0 \Rightarrow \boxed{x^2 + 2\eta\mu x > 0}$$