

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία (σελ. 194)

A2. Θεωρία (σελ. 141)

A3. α) Σ
β) Σ
γ) Λ
δ) Σ

A4. γ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x^2 - x + 16} + x) = \sqrt{1^2 - 1 + 16} + 1 = 4 + 1 = 5$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\alpha x^2 - 5\alpha x + 3\alpha}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha(2x^2 - 5x + 3)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha \cancel{(x-1)} (2x-3)}{\cancel{(x-1)} (x+1)} = \frac{\alpha(2 \cdot 1 - 3)}{1+1} = -\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 1$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow -\frac{\alpha}{2} = 5 \Rightarrow \boxed{\alpha = -10}$$

$$\begin{aligned} \text{B2. i)} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\alpha x^2 - 5\alpha x + 3\alpha}{x^2 - 1} \stackrel{\alpha = -10}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-20x^2 + 50x - 30}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-20x^2}{x^2} = \boxed{-20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 16} + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 16} + x)(\sqrt{x^2 - x + 16} - x)}{\sqrt{x^2 - x + 16} - x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 16} - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2}\right)} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 16 - x^2}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2}} - x} = \\
&\stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 16}{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2}} - x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{16}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2}} - 1} = \frac{-1 + 0}{-\sqrt{1 - 0 + 0} - 1} = \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

B3. Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - e^{2x}$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Τότε

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως διαφορά συνεχών

$$h(0) = f(0) - e^{2 \cdot 0} \stackrel{f(0) = \sqrt{0^2 - 0 + 16} + 0 = 4}{=} 4 - 1 = 3 > 0$$

$$h(1) = f(1) - e^{2 \cdot 1} \stackrel{f(1) = \sqrt{1^2 - 1 + 16} + 1 = 5}{=} 5 - e^2 \stackrel{e \approx 2,718 \Rightarrow e^2 > 5}{<} 0$$

$$\text{άρα } h(0) \cdot h(1) < 0$$

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{2x}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$, $f(1) = \frac{1}{2}$ και $f(3) = 2$

$$\text{άρα } f(1) < 1 < f(3)$$

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1$

Γ2. Στη σχέση $f(f(x)+1) \cdot f(f(x)) = f(f(x)+3) \cdot f(f(x)+2)$ θέτουμε όπου x το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος και έχουμε

$$f(f(x_0)+1) \cdot f(f(x_0)) = f(f(x_0)+3) \cdot f(f(x_0)+2) \stackrel{f(x_0)=1}{\Leftrightarrow}$$

$$f(1+1) \cdot f(1) = f(1+3) \cdot f(1+2) \Leftrightarrow \boxed{f(2) \cdot f(1) = f(4) \cdot f(3)}$$

Γ3. Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f^2(x) - f(1)f(2)$, για κάθε $x \in [1, 2]$. Τότε

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, ως διαφορά συνεχών και

$$h(1) = f^2(1) - f(1)f(2) = f(1)[f(1) - f(2)]$$

$$h(2) = f^2(2) - f(1)f(2) = f(2)[f(2) - f(1)]$$

$$\text{άρα } h(1) \cdot h(2) = -f(1)f(2)[f(1) - f(2)]^2 \quad (1)$$

Επειδή η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα οι αριθμοί $f(1)$ και $f(2)$, θα είναι ομόσημοι άρα από την σχέση (1) θα ισχύει $h(1) \cdot h(2) \leq 0$ (2)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

$$\alpha) \text{ Αν } \underline{h(1) = 0} \Leftrightarrow f^2(1) = f(1)f(2) \text{ οπότε υπάρχει, } x_1 \in [1, 2] \text{ (} x_1 = 1 \text{) με } f^2(x_1) = f(1)f(2)$$

$$\beta) \text{ Αν } \underline{h(2) = 0} \Leftrightarrow f^2(2) = f(1)f(2) \text{ οπότε υπάρχει, } x_1 \in [1, 2] \text{ (} x_1 = 2 \text{) με } f^2(x_1) = f(1)f(2)$$

$$\gamma) \text{ Αν } \underline{h(1) \neq 0 \text{ και } h(2) \neq 0} \text{ τότε από (2) προκύπτει ότι } h(1) \cdot h(2) < 0 \text{ και επειδή η } h \text{ είναι συνεχής στο } [1, 2] \text{ από το } \underline{\text{θεώρημα Bolzano}} \text{ προκύπτει ότι υπάρχει, } x_1 \in (1, 2) \text{ άρα και } x_1 \in [1, 2] \text{ με } h(x_1) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_1) = f(1)f(2)$$

$$\text{Οπότε σε κάθε περίπτωση υπάρχει } x_1 \in [1, 2] \text{ με } f^2(x_1) = f(1)f(2)$$

$$\underline{\text{Ομοίως}} \text{ υπάρχει } x_2 \in [2, 3] \text{ με } f^2(x_2) = f(3)f(4)$$

$$\mathbf{\Gamma 4.} \text{ Επειδή } f(2) \cdot f(1) = f(4) \cdot f(3) \stackrel{\Gamma 3}{\Rightarrow} f^2(x_1) = f^2(x_2) \Rightarrow f(x_1) = \pm f(x_2)$$

Όμως επειδή η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα οι αριθμοί $f(x_1)$ και $f(x_2)$, θα είναι ομόσημοι, οπότε θα ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ με $x_1 \neq x_2$ (αφού $x_1 \in [1, 2]$ και $x_2 \in [3, 4]$). Άρα η f δεν είναι 1-1 και άρα δεν αντιστρέφεται

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στη σχέση $f(x \cdot f(x)) = x - f(x)$ θέτουμε όπου x το 0 και έχουμε

$$f(0 \cdot f(0)) = 0 - f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

$$\text{Άρα η εξίσωση } f(x) = 0 \text{ έχει λύση την } x = 0$$

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει και άλλη λύση, την $x_1 \neq 0$. Τότε

$$f(x \cdot f(x)) = x - f(x) \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } x_1}{\Rightarrow} f(x_1 \cdot f(x_1)) = x_1 - f(x_1) \stackrel{f(x_1)=0}{\Rightarrow}$$

$$f(0) = x_1 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} x_1 = 0 \text{ άτοπο διότι } x_1 \neq 0$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$

$$\Delta 2. f(x \cdot f(x)) = x - f(x) \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } x_0}{\Rightarrow} f(x_0 \cdot f(x_0)) = x_0 - f(x_0) \stackrel{f(x_0)=x_0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x_0 \cdot x_0) = x_0 - x_0 \Rightarrow f(x_0^2) = 0 \stackrel{\text{ερώτημα } \Delta 1}{\Rightarrow} x_0^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 0}$$

$\Delta 3.$ Έστω $f(-1) = \theta > 0$

Επειδή η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$ συμπεραίνουμε ότι στο διάστημα $(-\infty, 0)$, δεν μηδενίζεται άρα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $f(-1) = \theta > 0$, θα είναι

$$\underline{f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0)}$$

Όμως

$$f(x \cdot f(x)) = x - f(x) \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -1}{\Rightarrow} f(-1 \cdot f(-1)) = -1 - f(-1) \stackrel{f(-1)=\theta}{\Rightarrow}$$

$$f(-\theta) = -1 - \theta \stackrel{\theta > 0}{\Rightarrow} f(-\theta) < 0 \text{ άτοπο διότι } -\theta \in (-\infty, 0) \text{ και άρα } f(-\theta) > 0$$

Άρα θα ισχύει $f(-1) \leq 0$ και επειδή $f(-1) \neq 0$ (αφού η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$), θα ισχύει $f(-1) < 0$

$\Delta 4.$ Έστω $f(1) = \alpha < 0$

Επειδή η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$ συμπεραίνουμε ότι στο διάστημα $(0, +\infty)$, δεν μηδενίζεται άρα στο διάστημα $(0, +\infty)$ η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $f(1) = \alpha < 0$, θα είναι

$$\underline{f(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)}$$

Όμως

$$f(x \cdot f(x)) = x - f(x) \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } 1}{\Rightarrow} f(1 \cdot f(1)) = 1 - f(1) \stackrel{f(1)=\alpha}{\Rightarrow}$$

$$f(\alpha) = 1 - \alpha \stackrel{\alpha < 0}{\Rightarrow} f(\alpha) > 0 \text{ άτοπο διότι } \alpha \in (-\infty, 0) \text{ και άρα το } f(\alpha) \text{ θα είναι ομόσημο με το } f(-1)$$

Άρα θα ισχύει $f(1) \geq 0$ και επειδή $f(1) \neq 0$ (αφού η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$), θα ισχύει $f(1) > 0$ (3)

Άρα επειδή η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$ συμπεραίνουμε ότι στο διάστημα $(0, +\infty)$, δεν μηδενίζεται άρα στο διάστημα $(0, +\infty)$ η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $f(1) > 0$, θα είναι

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Ακόμη

$$\text{Έστω } f(1) = \beta > 1$$

Τότε

$$f(x \cdot f(x)) = x - f(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } 1} f(1 \cdot f(1)) = 1 - f(1) \xrightarrow{f(1)=\beta}$$

$$f(\beta) = 1 - \beta \xrightarrow{\beta > 1} f(\beta) < 0 \quad \underline{\text{άτοπο}} \text{ διότι } \beta \in (0, +\infty) \text{ και άρα το } f(\beta) > 0$$

Άρα θα ισχύει $f(1) \leq 1$ και επειδή $f(1) \neq 0$ (αφού η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$), θα ισχύει $f(1) < 1$ (4)

$$\text{Άρα } (3), (4) \Rightarrow \boxed{0 < f(1) < 1}$$