

ΘΕΜΑ Α

A1. θεωρία σελ 76

A2. θεωρία σελ 31

A3. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

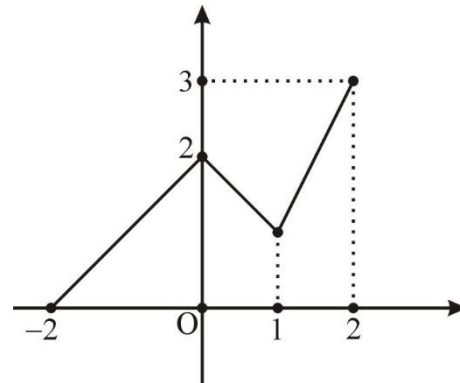
A4. Έστω $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x \leq 0 \\ 2-x, & 0 < x < 1 \\ x+1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Όπως φαίνεται και από την γραφική παράσταση η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$

έχει ελάχιστη τιμή το $f(-2)$

έχει μέγιστη τιμή το $f(2)$

αλλά δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2, 2]$



ΘΕΜΑ Β

α) Πρέπει $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

β) Αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1-2}{x_1-1} = \frac{x_2-2}{x_2-1} \Rightarrow (x_1-2)(x_2-1) = (x_2-2)(x_1-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{x_1}x_2 - x_1 - 2x_2 + 2 = \cancel{x_2}x_1 - x_2 - 2x_1 + 2 \Rightarrow 2x_1 - x_1 = 2x_2 - x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι 1-1

ΘΕΜΑ Γ

$$f^3(x) + f^2(x) + f(x) = xe^x - \sin x \Rightarrow f(x)[f^2(x) + f(x) + 1] = xe^x - \sin x$$

Έχουμε

$$f^3(x) + f^2(x) + f(x) = xe^x - \sin x \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} f^3(0) + f^2(0) + f(0) = 0 \cdot e^0 - \sin 0 \Rightarrow f(0)[f^2(0) + f(0) + 1] = -1 \quad (1)$$

το τριώνυμο $y^2 + y + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ κατά συνέπεια είναι $y^2 + y + 1 > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ οπότε και $f^2(x) + f(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα και $f^2(0) + f(0) + 1 > 0 \quad (2)$

$$\text{Επομένως } (1), (2) \Rightarrow f(0) = \frac{-1}{f^2(0) + f(0) + 1} < 0$$

Ακόμη

$$f^3(x) + f^2(x) + f(x) = xe^x - \sin x \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1} f^3(1) + f^2(1) + f(1) = 1 \cdot e^1 - \sin 1 \Rightarrow f(1)[f^2(1) + f(1) + 1] = e - \sin 1 \quad (3)$$

το τριώνυμο $y^2 + y + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ κατά συνέπεια είναι $y^2 + y + 1 > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ οπότε και $f^2(x) + f(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 άρα και $f^2(1) + f(1) + 1 > 0$ (2)

$$\text{Επομένως } (1), (2) \Rightarrow f(1) = \frac{e - \sin 1}{f^2(1) + f(1) + 1} \stackrel{e \approx 2,718 \Rightarrow e - \sin 1 > 0}{\Rightarrow} f(1) > 0$$

Οπότε
 Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

ΘΕΜΑ Δ

α) Θέτουμε $h(x) = \frac{4f(x) + f(-x)}{x}$. Προφανώς $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 3$ και

$$h(x) = \frac{4f(x) + f(-x)}{x} \Rightarrow 4f(x) + f(-x) = xh(x) \quad (1)$$

$$\text{Ακόμη θα είναι } h(-x) = \frac{4f(-x) + f(x)}{-x} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow 0} h(-x) \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y = -x \\ \text{για όταν } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 3$$

και

$$h(-x) = \frac{4f(-x) + f(x)}{-x} \Rightarrow 4f(-x) + f(x) = -xh(-x) \quad (2)$$

Λύνουμε σαν σύστημα τις (1) και (2)

$$\begin{array}{l} -4 \cdot \begin{cases} 4f(x) + f(-x) = xh(x) \\ 4f(-x) + f(x) = -xh(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16f(x) - \cancel{4f(-x)} = -4xh(x) \\ \cancel{4f(-x)} + f(x) = -xh(-x) \end{cases} \quad (+) \\ \hline -15f(x) = -4xh(x) - xh(-x) \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4xh(x) + xh(-x)}{15} \quad (3)$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 4[xh(x)] + \lim_{x \rightarrow 0} [xh(-x)]}{15} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{4 \cdot 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xh(x) + xh(-x)}{15x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} [4h(x) + h(-x)]}{15\cancel{x}} = \frac{4 \cdot 3 + 3}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x)}{2x^2 + f^2(x)} \stackrel{\substack{\text{διαιρούμε} \\ \text{αριθμητή και} \\ \text{παρονομαστή} \\ \text{με } x^2}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} f(2x)}{\frac{2\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2} + \frac{f^2(x)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(2x)}{x}}{2 + \frac{f^2(x)}{x^2}} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(2x)}{2x} \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=2x \\ \text{όταν } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(y)}{y} \stackrel{\beta) \text{ ερώτημα}}{=} 2 \cdot 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} \right]^2 = 1^2 = 1$$