

13.1

ΘΕΜΑ Α

A1. θεωρία σελ 76

A2. θεωρία σελ 73

A3. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

A4. Έστω $\boxed{g(x_1) = g(x_2)} \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \xRightarrow{f \circ g^{-1}} \boxed{x_1 = x_2}$

Άρα η g είναι 1-1

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f^2(x) - 3f(x) - x$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, η h παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια ελάχιστη τιμή (η μέγιστη δεν ενδιαφέρει) δηλαδή υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$h(x) \leq h(x_0) \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

$$\text{άρα } f^2(x) - 3f(x) - x \geq f^2(x_0) - 3f(x_0) - x_0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

ΘΕΜΑ Γ

α) Πρέπει $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $(1, +\infty)$

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ln(x_1 - 1) > -\ln(x_2 - 1) \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$\Rightarrow -\ln(x_1 - 1) - x_1 > -\ln(x_2 - 1) - x_2 \Rightarrow \boxed{f(x_1) > f(x_2)}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε είναι και 1-1

γ) Καταρχήν θα πρέπει το $1-x$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f δηλαδή θα πρέπει $1-x > 0 \Rightarrow x < 1$

$$f^{-1}(x) = 1-x \xRightarrow{\text{f άρουμε}} f(f^{-1}(x)) = f(1-x) \Rightarrow x = f(1-x) \Rightarrow x = f(1-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\ln(1-x-1) - (1-x) \Rightarrow \cancel{x} = -\ln(-x) - 1 + \cancel{x} \Rightarrow$$

$$0 = -\ln(-x) - 1 \Rightarrow \ln(-x) = -1 \Rightarrow \ln(-x) = \ln(e^{-1}) \Rightarrow -x = e^{-1} \Rightarrow x = -\frac{1}{e}$$

που γίνεται δεκτή

ΘΕΜΑ Δ

α) Καταρχήν έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(\ln x) \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y = \ln x \\ \text{όταν } x \rightarrow 0^+ \text{ } y \rightarrow -\infty}}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x) \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y = f(x) \\ \text{επειδή η } f \text{ είναι συνεχής} \\ \text{όταν } x \rightarrow 0^+ \text{ } y \rightarrow f(0)}}{=} \lim_{y \rightarrow f(0)} \ln y = \ln f(0) \quad (2)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} f(\ln x) + \ln f(x) &= 2x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(\ln x) + \ln f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(\ln x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x) = 0 \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} 0 + \ln f(0) = 0 \Rightarrow \ln f(0) = \ln 1 \Rightarrow f(0) = 1 \end{aligned}$$

β) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(\ln x) + \ln f(x) &= 2x \stackrel{\text{θέτουμε } x=1}{\Rightarrow} f(\ln 1) + \ln f(1) = 2 \cdot 1 \Rightarrow f(0) + \ln f(1) = 2 \stackrel{f(0)=1}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow 1 + \ln f(1) = 2 \Rightarrow \ln f(1) = 1 \Rightarrow \ln f(1) = \ln e \Rightarrow f(1) = e \end{aligned}$$

και ακόμη

$$\begin{aligned} f(\ln x) + \ln f(x) &= 2x \stackrel{\text{θέτουμε } x=e}{\Rightarrow} f(\ln e) + \ln f(e) = 2 \cdot e \Rightarrow f(1) + \ln f(e) = 2e \stackrel{f(1)=e}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow e + \ln f(e) = 2e \Rightarrow \ln f(e) = e \Rightarrow \ln f(e) = \ln e^e \Rightarrow f(e) = e^e \end{aligned}$$

$$\text{Ακόμη } \frac{4x-1}{2x^2} = \frac{e^x}{f(x)} \Leftrightarrow (4x-1) \cdot f(x) = 2x^2 e^x \Leftrightarrow (4x-1) \cdot f(x) - 2x^2 e^x = 0$$

$$\text{Οπότε θέτουμε } h(x) = (4x-1) \cdot f(x) - 2x^2 e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= (4 \cdot 0 - 1) \cdot f(0) - 2 \cdot 0^2 \cdot e^0 \stackrel{f(0)=1}{\Rightarrow} h(0) = -1 < 0 \\ h(1) &= (4 \cdot 1 - 1) \cdot f(1) - 2 \cdot 1^2 \cdot e^1 \stackrel{f(1)=e}{\Rightarrow} h(1) = e > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_1) = 0$$

ακόμη η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$

$$\left. \begin{aligned} h(1) &= (4 \cdot 1 - 1) \cdot f(1) - 2 \cdot 1^2 \cdot e^1 \stackrel{f(1)=e}{\Rightarrow} h(1) = e > 0 \\ h(e) &= (4 \cdot e - 1) \cdot f(e) - 2 \cdot e^2 \cdot e^e \stackrel{f(e)=e^e}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow h(e) &= (4e - 1) \cdot e^e - 2e^2 \cdot e^e \Rightarrow \\ \Rightarrow h(e) &= (-2e^2 + 4e - 1) \cdot e^e \Rightarrow \\ \Rightarrow h(e) &= [-2e(e - 2) - 1] \cdot e^e \stackrel{e > 2}{\Rightarrow} h(e) < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(e) < 0$$

Οπότε , σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano , υπάρχει $x_2 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $h(x_2) = 0$

Επομένως η εξίσωση $h(x) = 0$ άρα και η ισοδύναμη εξίσωση $\frac{4x-1}{2x^2} = \frac{e^x}{f(x)}$,

έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(0, e)$