

9.9 1)

α) Έχουμε

$$x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2 \xRightarrow{x=0} \boxed{0 \leq f(0) \leq 0} \Rightarrow f(0) = 0$$

β) Είναι

$$\left. \begin{array}{l} x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2 \\ \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} (x - x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + x^2) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \end{array}$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

9.9 2)

α) Έχουμε

$$2x - 1 \leq f(x) \leq x^2 \xRightarrow{x=1} \boxed{1 \leq f(1) \leq 1} \Rightarrow f(1) = 1$$

β) Είναι

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 1 \leq f(x) \leq x^2 \\ \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \end{array}$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$, άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$

9.9 3)

α) Έχουμε

$$4x^3 + 4x \leq f(x) \leq x^4 + 5x^2 + 4 \xRightarrow{x=2} \boxed{40 \leq f(2) \leq 40} \Rightarrow f(2) = 40$$

β) Είναι

$$\left. \begin{array}{l} 4x^3 + 4x \leq f(x) \leq x^4 + 5x^2 + 4 \\ \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 2} (4x^3 + 4x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^4 + 5x^2 + 4) = 40 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 40 \end{array}$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 40$, άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$