

9.8 1)

Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x) + 2x}{x + 1}$ οπότε προφανώς $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 3$ και

$$h(x) = \frac{f(x) + 2x}{x + 1} \Rightarrow h(x)(x + 1) = f(x) + 2x \Rightarrow f(x) = h(x)(x + 1) - 2x \Rightarrow$$

(Από την παραπάνω σχέση δεν μπορούμε να βρούμε το $f(-1)$ θέτοντας $x = -1$ διότι ισχύει για κάθε $x \neq -1$)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [h(x)(x + 1) - 2x] \stackrel{\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 3}{\Rightarrow} 3(-1 + 1) - 2(-1) = 2$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$ οπότε

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \Rightarrow \boxed{f(-1) = 2}$$

9.8 2)

Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x) - x}{x - 2}$, $x \neq 2$, οπότε προφανώς είναι $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 7$ και

$$h(x) = \frac{f(x) - x}{x - 2} \Rightarrow h(x)(x - 2) = f(x) - x \Rightarrow f(x) = h(x)(x - 2) + x \Rightarrow$$

(Από την παραπάνω σχέση δεν μπορούμε να βρούμε το $f(-1)$ θέτοντας $x = -1$ διότι ισχύει για κάθε $x \neq -1$)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [h(x)(x - 2) + x] \stackrel{\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 7}{\Rightarrow} 7(2 - 2) + 2 = 2$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ οπότε

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow \boxed{f(2) = 2}$$

9.8 3)

Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x) + x^2}{2x - 6}$, $x \neq 3$, οπότε προφανώς είναι $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = -5$ και

$$h(x) = \frac{f(x) + x^2}{2x - 6} \Rightarrow h(x)(2x - 6) = f(x) + x^2 \Rightarrow f(x) = h(x)(2x - 6) - x^2 \Rightarrow$$

(Από την παραπάνω σχέση δεν μπορούμε να βρούμε το $f(-1)$ θέτοντας $x = -1$ διότι ισχύει για κάθε $x \neq -1$)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} [h(x)(2x - 6) - x^2] \stackrel{\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = -5}{\Rightarrow} -5(2 \cdot 3 - 6) - 3^2 = -9$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ οπότε

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \Rightarrow \boxed{f(3) = -9}$$