

9.7 1)

Για κάθε $x \neq 0$ είναι

$$xf(x) = 2x^2 + x \Rightarrow f(x) = \frac{2x^2 + x}{x} \Rightarrow$$

(Από την παραπάνω σχέση δεν μπορούμε να βρούμε το $f(0)$ θέτοντας $x = 0$ διότι ισχύει για κάθε $x \neq 0$)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(2x + 1)}{\cancel{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1}$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow \boxed{f(0) = 1}$$

9.7 2)

Για κάθε $x \neq 1$ είναι

$$(x-1)f(x) = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x-1} \Rightarrow$$

(Από την παραπάνω σχέση δεν μπορούμε να βρούμε το $f(1)$ θέτοντας $x = 1$ διότι ισχύει για κάθε $x \neq 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x-1} \Rightarrow \frac{x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{x-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + 4 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5}$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ οπότε

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow \boxed{f(1) = 5}$$

9.7 3)

Για κάθε $x \neq 2$ είναι

$$(x-2)f(x) = 4\sqrt{x+2} - 8 \Rightarrow f(x) = \frac{4\sqrt{x+2} - 8}{x-2} \Rightarrow$$

(Από την παραπάνω σχέση δεν μπορούμε να βρούμε το $f(2)$ θέτοντας $x = 2$ διότι ισχύει για κάθε $x \neq 2$)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(\sqrt{x+2} - 2)}{x-2} \Rightarrow \frac{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με } \sqrt{x+2} + 2}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(\sqrt{x+2}^2 - 2^2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x+2-4)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 \cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)} (\sqrt{x+2} + 2)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{\sqrt{2+2} + 2} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1}$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ οπότε

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow \boxed{f(2) = 1}$$