

9.4 1)

Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-1)} = \frac{3+3}{3-1} = \frac{6}{2} = 3 \\ f(3) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$

9.4 2)

Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 - 3x + 1} \stackrel{\substack{x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4) \\ 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(2x-1)}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{(x-1)}(2x-1)} = \frac{1+4}{2 \cdot 1 - 1} = 5 \\ f(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

Άρα η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$

9.4 3)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{x+6} - 2) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = (\sqrt{8} - 2)(+\infty) = +\infty$$

Άρα προφανώς η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 2$

9.4 4)

Έχουμε

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{\substack{x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \\ x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = \frac{2+2}{2-1} = 4 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}{\sqrt{x+2}^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+2} + 2)}{\cancel{x-2}} = \sqrt{2+2} + 2 = 4 \end{aligned}$$

- $f(2) = 4$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

9.4 5)

Έχουμε

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{\eta\mu 2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + 2 \frac{\eta\mu 2x}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 2x}{2x} = 0 + 2 \cdot 1 = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+2)}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\eta\mu x} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 1 \cdot (0+2) = 2$

- $f(0) = 2$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$