

9.21

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 . Δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

Πράγματι

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| < |x - y| &\stackrel{y=x_0}{\Rightarrow} |f(x) - f(x_0)| < |x - x_0| \Rightarrow \\ \Rightarrow -|x - x_0| < f(x) - f(x_0) < |x - x_0| &\left\{ \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \end{array} \right. \quad (1) \\ \text{όμως } \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = \lim_{x \rightarrow x_0} -|x - x_0| = 0 &\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \stackrel{(1)}{=} \\ &= 0 + f(x_0) = \boxed{f(x_0)} \end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 και άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$