9.20

Για $x>0$ έχουμε

$$xf(x)+\eta\mu x\le g(x)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)+x\Rightarrow xf(x)\le g(x)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)+x-\eta\mu x\overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x)\le g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+\frac{x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0^+}f(x)\le\lim_{x\to0^+}\left[g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+\frac{x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}\right]\Rightarrow$$

$$\overset{f:\text{συνεχής στο }0}{\Rightarrow} f(0)\le\lim_{x\to0^+}\left[g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+1-\frac{\eta\mu x}{x}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0)\le\lim_{x\to0^+}g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+1-\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}\overset{\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(0)\le\lim_{x\to0^+}g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+\cancel{1}-\cancel{1}\Rightarrow f(0)\le\lim_{x\to0^+}g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\quad(1)$$

Επειδή η g έχει σύνολο τιμών $g(A)=(\alpha,\beta)$ θα είναι $\alpha\le g(x)\le\beta$ για κάθε $x\in R$

Τότε

$$\alpha\le g(x)\le\beta\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε με}\\ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}>0}}{\Rightarrow}\alpha\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\le g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\le\beta\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\quad(2)$$

Όμως

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}^2-1^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{0}{\sqrt{1+0^2}+1}=0$$

Οπότε $\lim_{x\to0}\left(\alpha\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)=\alpha\cdot0=0\quad(3)$ και $\lim_{x\to0}\left(\beta\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)=\beta\cdot0=0\quad(4)$

Οπότε $(2),(3),(4)\overset{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow}\lim_{x\to0}\left[g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]=0\quad(5)$

Οπότε $(1)\overset{(5)}{\Rightarrow}f(0)\le0\quad(6)$

Ομοίως αν $x<0$ έχουμε

$$xf(x)+\eta\mu x\le g(x)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)+x\Rightarrow xf(x)\le g(x)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)+x-\eta\mu x\overset{x<0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+\frac{x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \geq \lim_{x\to 0^+}\left[g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+\frac{x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}\right] \Rightarrow$$

$$\overset{f:\text{συνεχής στο } 0}{\Rightarrow} f(0) \geq \lim_{x\to 0^-}\left[g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+1-\frac{\eta\mu x}{x}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) \geq \lim_{x\to 0^-} g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+1-\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x} \overset{\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(0) \geq \lim_{x\to 0^-} g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+\cancel{1}-\cancel{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) \geq \lim_{x\to 0^-} g(x)\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \overset{(5)}{\Rightarrow} f(0) \geq 0 \quad (7)$$

Άρα (6), (7) $\Rightarrow \boxed{f(0)=0}$