

9.16 1)

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Ακόμη αν στη σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (1) θέσουμε $x = y = 0$, έχουμε

$$(1) \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=y=0} f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

Για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 . Δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

Πράγματι

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} & \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=x-x_0 \Rightarrow x=y+x_0 \\ \text{όταν } x \rightarrow x_0 \text{ τότε } y \rightarrow 0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} f(y+x_0) \stackrel{(1)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} [f(y) + f(x_0)] = \\ & = \lim_{y \rightarrow 0} f(y) + \lim_{y \rightarrow 0} f(x_0) = 0 + f(x_0) = \boxed{f(x_0)} \end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 και άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

9.16 2)

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Ακόμη αν στη σχέση $f(xy) = f(x) + f(y)$ (1) θέσουμε $x = y = 1$, έχουμε

$$(1) \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=y=1} f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 2f(1) \Rightarrow \boxed{f(1) = 0}$$

Για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 . Δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$

Πράγματι

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} & \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=\frac{x}{x_0} \Rightarrow x=y \cdot x_0 \\ \text{όταν } x \rightarrow x_0 \text{ τότε } y \rightarrow 1}}{=} \lim_{y \rightarrow 1} f(y \cdot x_0) \stackrel{(1)}{=} \lim_{y \rightarrow 1} [f(y) + f(x_0)] = \\ & = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) + \lim_{y \rightarrow 1} f(x_0) = 0 + f(x_0) = \boxed{f(x_0)} \end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in (0, +\infty)$ και άρα είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

9.16 3)

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Ακόμη αν στη σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (1) θέσουμε $x = y = 0$, έχουμε

$$(1) \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=y=0} f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

Για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 . Δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
& \text{θέτουμε } y = x - x_0 + 1 \Rightarrow x = y + x_0 - 1 \\
& \text{όταν } x \rightarrow x_0 \text{ τότε } y \rightarrow 1 \\
& \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \lim_{y \rightarrow 1} f(y + x_0 - 1) \stackrel{(1)}{=} \lim_{y \rightarrow 1} [f(y) + f(x_0 - 1)] = \\
& = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) + \lim_{y \rightarrow 1} f(x_0 - 1) \stackrel{(1)}{=} \lim_{y \rightarrow 1} f(y) + \lim_{y \rightarrow 1} [f(x_0) + f(-1)] = \\
& \lim_{y \rightarrow 1} f(y) = f(1) \\
& \lim_{y \rightarrow 1} f(x_0) = f(x_0) \\
& \lim_{y \rightarrow 1} f(-1) = f(-1) \\
& = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) + \lim_{y \rightarrow 1} f(x_0) + \lim_{y \rightarrow 1} f(-1) = f(1) + f(x_0) + f(-1) \Rightarrow \\
& \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(1-1) = f(1) + f(-1) \Rightarrow f(0) = f(1) + f(-1) \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} f(1) + f(-1) = 0 \\
& = \boxed{f(x_0)}
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 και άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

9.13 4)

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Ακόμη αν στη σχέση $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ (1) θέσουμε $x = y = 1$, έχουμε

$$(1) \Rightarrow f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \Rightarrow f(1) = f^2(1) \stackrel{f(1) \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{f(1) = 1}$$

Για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$, θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 . Δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για κάθε

$$x_0 \in \mathbb{R}^*$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
& \text{θέτουμε } y = \frac{x}{x_0} \Rightarrow x = y \cdot x_0 \\
& \text{όταν } x \rightarrow x_0 \text{ τότε } y \rightarrow 1 \\
& \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \lim_{y \rightarrow 1} f(y \cdot x_0) \stackrel{(1)}{=} \lim_{y \rightarrow 1} [f(y) \cdot f(x_0)] = \\
& = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) \cdot \lim_{y \rightarrow 1} f(x_0) = f(1) \cdot f(x_0) \stackrel{f(1)=1}{=} 1 \cdot f(x_0) = \boxed{f(x_0)}
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}^*$ και άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$

9.13 5)

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Ακόμη αν στη σχέση $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (1) θέσουμε $x = y = 0$, έχουμε

$$(1) \Rightarrow f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

Για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_1 . Δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$, για κάθε $x_1 \in \mathbb{R}$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
& \text{θέτουμε } y = x - x_1 + x_0 \Rightarrow x = y + x_1 - x_0 \\
& \text{όταν } x \rightarrow x_1 \text{ τότε } y \rightarrow x_0 \\
& \boxed{\lim_{x \rightarrow x_1} f(x)} = \lim_{y \rightarrow x_0} f(y + x_1 - x_0) \stackrel{(1)}{=} \lim_{y \rightarrow x_0} [f(y) + f(x_1 - x_0)] = \\
& = \lim_{y \rightarrow x_0} f(y) + \lim_{y \rightarrow x_0} f(x_1 - x_0) \stackrel{(1)}{=} \lim_{y \rightarrow x_0} f(y) + \lim_{y \rightarrow x_0} [f(x_1) + f(-x_0)] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{y \rightarrow x_0} f(y) = f(x_0) \\
& \lim_{y \rightarrow x_0} f(x_1) = f(x_1) \\
& \lim_{y \rightarrow x_0} f(-x_0) = f(-x_0) \\
= & \lim_{y \rightarrow x_0} f(y) + \lim_{y \rightarrow x_0} f(x_1) + \lim_{y \rightarrow x_0} f(-x_0) = f(x_0) + f(x_1) + f(-x_0) \Rightarrow \\
(1) \quad & \stackrel{\text{θέτουμε } x=x_0, y=-x_0}{\Rightarrow} f(x_0 - x_0) = f(x_0) + f(-x_0) \Rightarrow f(0) = f(x_0) + f(-x_0) \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} f(x_0) + f(-x_0) = 0 \\
& = \boxed{f(x_1)}
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_1 και άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$