

9.15 1)

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 2)$ ως πολυωνυμική

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(2, 3)$ ως πολυωνυμική

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(3, +\infty)$ ως πολυωνυμική

Οπότε για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι συνεχής στο $x_1 = 2$ και στο $x_2 = 3$

Όμως

για να είναι η f συνεχής στο $x_1 = 2$, θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (\beta x^3 - x + \alpha) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-\alpha x + \beta - 1) = -\alpha \cdot 2 + \beta - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta \cdot 2^3 - 2 + \alpha = -\alpha \cdot 2 + \beta - 1 = \cancel{-\alpha \cdot 2 + \beta - 1} \Rightarrow 8\beta + \alpha - 2 = -2\alpha + \beta - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{3\alpha + 7\beta = 1} \quad (1)$$

για να είναι η f συνεχής στο $x_2 = 3$, θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} (-\alpha x + \beta - 1) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + \alpha x + 3\beta) = 3^2 + \alpha \cdot 3 + 3\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\alpha \cdot 3 + \beta - 1 = 3^2 + \alpha \cdot 3 + 3\beta = \cancel{3^2 + \alpha \cdot 3 + 3\beta} \Rightarrow -3\alpha + \beta - 1 = 9 + 3\alpha + 3\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\alpha - 2\beta = 10 \Rightarrow \boxed{3\alpha + \beta = -5} \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\boxed{\alpha = -2 \text{ και } \beta = 1}$

9.15 2)

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, -1)$ ως πολυωνυμική

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-1, 1)$ ως πολυωνυμική

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(1, +\infty)$ ως πολυωνυμική

Οπότε για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι συνεχής στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 1$

Όμως

για να είναι η f συνεχής στο $x_1 = -1$, θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + \alpha x - 1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (\beta x + 1) = (-1)^2 + \alpha(-1) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1)^2 + \alpha(-1) - 1 = \beta(-1) + 1 = \cancel{(-1)^2 + \alpha(-1) - 1} \Rightarrow \cancel{1 - \alpha - 1} = -\beta + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha - \beta = -1}$$

για να είναι η f συνεχής στο $x_2 = 1$, θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (\beta x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 2\alpha - 2) = \beta \cdot 1 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta \cdot 1 + 1 = 1^2 + 1 + 2\alpha - 2 = \cancel{\beta \cdot 1 + 1} \Rightarrow \beta + 1 = 2\alpha \Rightarrow \boxed{2\alpha - \beta = 1} \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\boxed{\alpha = 2 \text{ και } \beta = 3}$

9.15 3)

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 2)$ ως πολυωνυμική

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(2, 4)$ ως πολωνυμική

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(4, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Οπότε για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι συνεχής στο $x_1 = 2$ και στο $x_2 = 4$

Όμως

για να είναι η f συνεχής στο $x_1 = 2$, θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (\alpha x^3 + \beta x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [(\alpha + 1)x + 3] = \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2 + 1 = (\alpha + 1) \cdot 2 + 3 = \cancel{\alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2 + 1} \Rightarrow 8\alpha + 2\beta + 1 = 2\alpha + 2 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha + 2\beta = 4 \Rightarrow \boxed{3\alpha + \beta = 2} \quad (1)$$

για να είναι η f συνεχής στο $x_2 = 4$, θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} [(\alpha + 1)x + 3] = \lim_{x \rightarrow 4^+} [(\beta - 1)|x - 5| - 1] = (\beta - 1)|4 - 5| - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha + 1)4 + 3 = (\beta - 1)|4 - 5| - 1 = \cancel{(\beta - 1)|4 - 5| - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha + 4 + 3 = \beta - 1 - 1 \Rightarrow \boxed{4\alpha - \beta = -9} \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\boxed{\alpha = -1 \text{ και } \beta = 5}$