

9.14 1)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1)$ ως πολυωνυμική

είναι συνεχής στο διάστημα $(1,2]$ ως πολυωνυμική

τέλος στο σημείο $x_0 = 1$, έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x - 2) = 5 \cdot 1 - 2 = 3 \\ f(1) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = 1$

Οπότε τελικά η f είναι συνεχής σε όλο το διάστημα $[0,2]$

9.14 2)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 2)$ ως πολυωνυμική

είναι συνεχής στο διάστημα $(2, +\infty)$ ως πολυωνυμική

τέλος στο σημείο $x_0 = 2$, έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \\ f(2) &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = 2$

Οπότε τελικά η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$

9.14 3)

Παρατηρούμε ότι

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 3 + 2 = 5 \\ f(3) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ οπότε δεν είναι συνεχής στο $[0,5]$

9.14 4)

Παρατηρούμε ότι

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \\ f(2) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ οπότε δεν είναι συνεχής στο $[-3,3]$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική

είναι συνεχής στο διάστημα $(1, +\infty)$ ως πολυωνυμική

τέλος στο σημείο $x_0 = -1$, έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + 1) = -2 \cdot (-1) + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (4x^2 - 1) = 4(-1)^2 - 1 = 3 \\ f(-1) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = -1$

Οπότε τελικά η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, -3)$ ως πολυωνυμική

είναι συνεχής στο διάστημα $(-3, 2)$ ως πολυωνυμική

είναι συνεχής στο διάστημα $(2, +\infty)$ ως πολυωνυμική

ακόμη στο σημείο $x_0 = -3$, έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} (x^2 - 5) = (-3)^2 - 5 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} (x + 7) = -3 + 7 = 4 \\ f(-3) &= -3 + 7 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -3$

τέλος στο σημείο $x_0 = 2$, έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 7) = 2 + 7 = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2 + 1) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9 \\ f(2) &= 2 \cdot 2^2 + 1 = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = 2$

Οπότε τελικά η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$