

9.11 1)

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και μάλιστα

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Οπότε για $x > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} xf(x) &\leq x^2 - 2x \xrightarrow{x>0} f(x) \leq \frac{x^2 - 2x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x}{x} \xrightarrow{f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(0) &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}} \Rightarrow f(0) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) \Rightarrow \boxed{f(0) \leq -2} \quad (1) \end{aligned}$$

Ενώ για $x < 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} xf(x) &\leq x^2 - 2x \xrightarrow{x<0} f(x) \geq \frac{x^2 - 2x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x} \xrightarrow{f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(0) &\geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}} \Rightarrow f(0) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2) \Rightarrow \boxed{f(0) \geq -2} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \boxed{f(0) = -2}$$

9.11 2)

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και μάλιστα

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

Οπότε για $x > 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} (x-2)f(x) &\leq x^2 - x - 2 \xrightarrow{x>2} f(x) \leq \frac{x^2 - x - 2}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(2) &\leq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}} \Rightarrow f(2) \leq \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) \Rightarrow \boxed{f(2) \leq 3} \quad (1) \end{aligned}$$

Ενώ για $x < 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} (x-2)f(x) &\leq x^2 - x - 2 \xrightarrow{x<2} f(x) \geq \frac{x^2 - x - 2}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(2) &\geq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}} \Rightarrow f(2) \geq \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) \Rightarrow \boxed{f(2) \geq 3} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \boxed{f(2) = 3}$$

9.11 3)

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και μάλιστα

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

Οπότε για $x > -1$, έχουμε

$$(x+1)f(x) \leq 2x^2 + x - 1 \Rightarrow f(x) \leq \frac{2x^2 + x - 1}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 + x - 1}{x+1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow f(-1) \leq \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(2x-1)}{x+1} \Rightarrow f(-1) \leq \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x-1) \Rightarrow \boxed{f(-1) \leq -3} \quad (1)$$

Ενώ για $x < -1$, έχουμε

$$(x+1)f(x) \leq 2x^2 + x - 1 \Rightarrow f(x) \geq \frac{2x^2 + x - 1}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 + x - 1}{x+1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow f(-1) \geq \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(2x-1)}{x+1} \Rightarrow f(-1) \geq \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x-1) \Rightarrow \boxed{f(-1) \geq -3} \quad (2)$$

$$\text{Από } (1), (2) \Rightarrow \boxed{f(-1) = -3}$$