Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

8.4

1) α) $\lim_{x\to+\infty}\left(5^x-7^x-3^x+6\right)=-\infty$

διότι $\lim_{x\to+\infty}\left(5^x-7^x-3^x+6\right)=\lim_{x\to+\infty}7^x\left(\frac{5^x}{7^x}-1-\frac{3^x}{7^x}+\frac{6}{7^x}\right)=$

$\lim_{x\to+\infty}7^x\left(\left(\frac{5}{7}\right)^x-1-\left(\frac{3}{7}\right)^x+\frac{6}{7^x}\right)=(+\infty)(0-1-0+0)=-\infty$

β) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-6^x}{2^x+6^x}=-1$

διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-6^x}{2^x+6^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{6^x}\left(\frac{2^x}{6^x}-1\right)}{\cancel{6^x}\left(\frac{2^x}{6^x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{6}\right)^x-1}{\left(\frac{2}{6}\right)^x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(3^x+8\right)=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(7^x-4\right)=+\infty$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(6^x-2^x\right)=\lim_{x\to+\infty}6^x\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]=+\infty\cdot(1-0)=+\infty$

5) $\lim_{x\to+\infty}\left(5^x-7^x\right)=\lim_{x\to+\infty}7^x\left[\left(\frac{5}{7}\right)^x-1\right]=+\infty\cdot(0-1)=-\infty$

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(3^x-e^x\right)=\lim_{x\to+\infty}3^x\left[1-\left(\frac{e}{3}\right)^x\right]\overset{e\approx2,718}{=}+\infty\cdot(1-0)=+\infty$

7) $\lim_{x\to+\infty}\left(4^x-3^x+5\right)=\lim_{x\to+\infty}4^x\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{5}{4^x}\right]=+\infty\cdot(1-0+0)=+\infty$

8) $\lim_{x\to+\infty}\left(2^x-5^x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}5^x\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x-1-\frac{1}{5^x}\right]=+\infty\cdot(0-1-0)=-\infty$

9) $\lim_{x\to+\infty}\left(6^x-4^x+2^x+3\right)=\lim_{x\to+\infty}6^x\left[1-\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{2}{6}\right)^x+\frac{3}{6^x}\right]=+\infty\cdot(1-0+0+0)=+\infty$

10) $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-3^x+2^x-9\right)=\lim_{x\to+\infty}3^x\left[\left(\frac{e}{3}\right)^x-1+\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{9}{3^x}\right]=+\infty\cdot(0-1+0-0)=-\infty$

11) $\lim_{x\to+\infty}\frac{8^x-5^x}{8^x+5^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{8^x}\left[1-\left(\frac{5}{8}\right)^x\right]}{\cancel{8^x}\left[1+\left(\frac{5}{8}\right)^x\right]}=\frac{1-0}{1+0}=1$

12) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-e^x}{3^x+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3^x}\left[1-\left(\frac{e}{3}\right)^x\right]}{\cancel{3^x}\left[1+\left(\frac{e}{3}\right)^x\right]}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

13) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=-x \Rightarrow x=-y\\ \text{όταν } x\to-\infty \text{ τότε } y\to+\infty}}{=}\lim_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-y}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-y}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(2^y-3^y\right)=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}3^y\left(\left(\frac{2}{3}\right)^y-1\right)=+\infty(0-1)=-\infty$$

14) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^x\right)=\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=-x \Rightarrow x=-y\\ \text{όταν } x\to-\infty \text{ τότε } y\to+\infty}}{=}\lim_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-y}-4^{-y}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^y-4^y\right)=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}4^y\left(\left(\frac{\frac{5}{4}}{4}\right)^y-1\right)=\lim_{y\to+\infty}4^y\left(\left(\frac{5}{16}\right)^y-1\right)=+\infty(0-1)=-\infty$$

15) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-\left(\frac{3}{4}\right)^x-9\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left[1-\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}\right)^x-\frac{9}{\left(\frac{2}{3}\right)^x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left[1-\left(\frac{9}{8}\right)^x-\frac{9}{\left(\frac{2}{3}\right)^x}\right]=+\infty(1-0-0)=+\infty$$