7.34

Θέτουμε $h(x)=2f(x)+g(x)$ (1) , οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$

Έχουμε

$$(1)\Rightarrow h(x)=2f(x)+g(x)\Rightarrow h^2(x)=\left[2f(x)+g(x)\right]^2\Rightarrow$$

$$h^2(x)=4f^2(x)+4f(x)g(x)+g^2(x)\Rightarrow 4f^2(x)+g^2(x)=h^2(x)-4f(x)g(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[4f^2(x)+g^2(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[h^2(x)-4f(x)g(x)\right]\Rightarrow$$

$$\overset{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=0}{\Rightarrow}\quad \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[4f^2(x)+g^2(x)\right]=0}$$

Θέτουμε τώρα $A(x)=4f^2(x)+g^2(x)$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=0$

Προφανώς είναι

$4f^2(x)\le A(x)$ (1)

και

$g^2(x)\le A(x)$ (2)

Οπότε

$$(1)\Rightarrow |4f(x)|\le\sqrt{A(x)}\Rightarrow -\sqrt{A(x)}\le 4f(x)\le\sqrt{A(x)}\Rightarrow -\frac{\sqrt{A(x)}}{4}\le f(x)\le\frac{\sqrt{A(x)}}{4}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{\sqrt{A(x)}}{4}\le f(x)\le\dfrac{\sqrt{A(x)}}{4} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\sqrt{A(x)}}{4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{A(x)}}{4}=0 \end{array}\right\}\overset{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow}\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$$

και

$$\left.\begin{array}{l}(2)\Rightarrow |g(x)|\le\sqrt{A(x)}\Rightarrow -\sqrt{A(x)}\le g(x)\le\sqrt{A(x)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{A(x)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{A(x)}=0\end{array}\right\}\overset{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow}\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=0}$$