7.33

Θέτουμε $h(x)=f(x)+\sqrt{x^2+2x+3}+x$ οπότε $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=4}$ και

$$f(x)=h(x)-\left[\sqrt{x^2+2x+3}+x\right]$$

Τώρα θα βρούμε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}+x\right]$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}^2-x^2}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x+3-\cancel{x^2}}{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}}-1\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}}-1\right)}=\frac{2+0}{-\sqrt{1+0+0}-1}=-\frac{2}{2}=\boxed{-1}$$

Επομένως

$$f(x)=h(x)-\left[\sqrt{x^2+2x+3}+x\right]\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}h(x)-\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}+x\right]\Rightarrow$$

$$\overset{\substack{\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=4\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}+x\right]=-1}}{\Rightarrow}\lim_{x\to-\infty}f(x)=4-(-1)\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=5\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left[-f(x)\right]=-5\Rightarrow$$

$$\overset{-f(x)=f(-x)}{\Rightarrow}\lim_{x\to-\infty}\left[f(-x)\right]=-5\Rightarrow\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=-x\\ \text{όταν } x\to-\infty\ \ y\to+\infty}}{\Rightarrow}\boxed{\lim_{y\to+\infty}f(y)=-5}$$