7.32

Θέτουμε $h(x)=f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+\sqrt{1+x^2}\cdot g(x)$ (1) , οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=4$

και $\varphi(x)=2f(x)+xg(x)$ (2) , οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=3$

Λύνουμε σαν σύστημα τις (1) και (2). Έχουμε

$$(1),(2)\Rightarrow \begin{matrix}-x\cdot\\ \sqrt{1+x^2}\cdot\end{matrix}\begin{cases}f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+\sqrt{1+x^2}\cdot g(x)=h(x)\\ 2f(x)+xg(x)=\varphi(x)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-xf(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}-x\sqrt{1+x^2}\cdot g(x)=-xh(x)\\ 2\sqrt{1+x^2}f(x)+x\sqrt{1+x^2}g(x)=\sqrt{1+x^2}\varphi(x)\end{cases}\overset{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}}{\Rightarrow}$$

$$-xf(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+2\sqrt{1+x^2}f(x)=-xh(x)+\sqrt{1+x^2}\varphi(x)\Rightarrow$$

$$f(x)\left[-x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+2\sqrt{1+x^2}\right]=-xh(x)+\sqrt{1+x^2}\varphi(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-xh(x)+\sqrt{1+x^2}\varphi(x)}{-x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+2\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\cancel{x}\left(-h(x)+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\varphi(x)\right)}{\cancel{x}\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{\cancel{x}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to 0^+}\sigma\upsilon\nu y=1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{-h(x)+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\varphi(x)}{-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}}\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=4,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=3}{=}\frac{-4+1\cdot3}{-1+2\cdot1}=\boxed{-1}$$

Ακόμη

$$(1),(2)\Rightarrow\begin{matrix}-2\cdot\\ \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\cdot\end{matrix}\begin{cases}f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+\sqrt{1+x^2}\cdot g(x)=h(x)\\ 2f(x)+xg(x)=\varphi(x)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}-2\sqrt{1+x^2}\cdot g(x)=-2h(x)\\ 2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}f(x)+x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}g(x)=\varphi(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\end{cases}\overset{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}g(x)-2\sqrt{1+x^2}\cdot g(x)=-2h(x)+\varphi(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x)\left(x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}-2\sqrt{1+x^2}\right)=-2h(x)+\varphi(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{-2h(x)+\varphi(x)\,\text{συν}\frac{1}{x}}{x\,\text{συν}\frac{1}{x}-2\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2h(x)+\varphi(x)\,\text{συν}\frac{1}{x}}{x\,\text{συν}\frac{1}{x}-2\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{\cancel{x}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\text{συν}\frac{1}{x}\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to 0^+}\text{συν}y=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=4,\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2h(x)+\varphi(x)\,\text{συν}\frac{1}{x}}{x\left(\text{συν}\frac{1}{x}-2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=\frac{-2\cdot 4+3\cdot 1}{(+\infty)(1-2\cdot 1)}=\frac{5}{-\infty}=\boxed{0}$$