

7.24 1)

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{\lambda x^2 + x + 3}}{3x - 1} &= -\frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + |x| \sqrt{\lambda + \frac{1}{x} + \frac{3}{x}}}{x \left(3 - \frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{3} \stackrel{x < 0 \Rightarrow |x| = -x}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x \sqrt{\lambda + \frac{1}{x} + \frac{3}{x}}}{x \left(3 - \frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 - \sqrt{\lambda + \frac{1}{x} + \frac{3}{x}}\right)}{\cancel{x} \left(3 - \frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1 - \sqrt{\lambda + 0 + 0}}{3 - 0} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \sqrt{\lambda} = -1 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 7}{x - 1} - \alpha x + \beta \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 5 - \alpha x(x - 1)}{x - 1} + \beta \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 5 - \alpha x^2 + \alpha x}{x - 1} + \beta \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(1 - \alpha)x^2 + (2 + \alpha)x + 5}{x - 1} + \beta \right) = \\ \text{κρατάμε μόνο τους} & \\ \text{μεγιστοβάθμιους όρους} & \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(1 - \alpha)x^2}{\cancel{x}} + \beta \right) &= (1 - \alpha)(-\infty) + \beta \end{aligned}$$

Οπότε αναγκαία θα είναι $1 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ (διαφορετικά το όριο θα ήταν $-\infty$ ή $+\infty$)

Για $\alpha = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 7}{x - 1} - x + \beta \right) &= 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\cancel{x}^2 + 2x + 7 - \cancel{x}^2 + x}{x - 1} + \beta \right) = 3 \Rightarrow \\ \text{κρατάμε μόνο τους} & \\ \text{μεγιστοβάθμιους όρους} & \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} + \beta \right) &= -3 \Rightarrow \beta + 3 = -3 \Rightarrow \beta = -6 \end{aligned}$$

7.24 2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\alpha x - \sqrt{\alpha^2 x^2 - x - 1}}{3x - 2} &= 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\alpha x - |x| \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{2}{x}\right)} = 5 \stackrel{|x| = x}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\alpha x - x \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{2}{x}\right)} = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(2\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x} \left(3 - \frac{2}{x}\right)} = 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 0 - 0}}{3 - 0} = 5 \Rightarrow \frac{2\alpha - |\alpha|}{3} = 5 \stackrel{\alpha > 0}{=} \frac{2\alpha - \alpha}{3} = 5 \Rightarrow \boxed{\alpha = 15} \end{aligned}$$

7.24 3)

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\alpha - 1)x^2 + 2\beta x + 5}{x - 1} \stackrel{\text{κρατάμε μόνο τους}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\alpha - 1)x^2}{\cancel{x}} = (\alpha - 1)(-\infty)$$

Οπότε αναγκαία θα είναι $\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$ (διαφορετικά το όριο θα ήταν $-\infty$ ή $+\infty$)

$$\text{Για } \alpha = 1 \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\beta x + 5}{x - 1} = 8 \xRightarrow{\text{κρατάμε μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\beta \cancel{x}}{\cancel{x}} = 8 \Rightarrow 2\beta = 8 \Rightarrow \boxed{\beta = 4}$$

7.24 4)

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 6x - 9}{x - 1} + \alpha x + \beta \right) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 6x - 9 + \alpha x(x - 1)}{x - 1} + \beta \right) = -1 =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 6x - 9 + \alpha x^2 - \alpha x}{x - 1} + \beta \right) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2 + \alpha)x^2 + (6 - \alpha)x - 9}{x - 1} + \beta \right) =$$

$$\xRightarrow{\text{κρατάμε μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2 + \alpha)\cancel{x^2}}{\cancel{x}} + \beta \right) = (2 + \alpha)(+\infty) + \beta$$

Οπότε αναγκαία θα είναι $2 + \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$ (διαφορετικά το όριο θα ήταν $-\infty$ ή $+\infty$)

Για $\alpha = -2$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 6x - 9}{x - 1} - 2x + \beta \right) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cancel{2x^2} + 6x - 9 - \cancel{2x^2} + 2x}{x - 1} + \beta \right) = -1 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\text{κρατάμε μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8\cancel{x}}{\cancel{x}} + \beta \right) = -1 \Rightarrow \beta + 8 = -1 \Rightarrow \boxed{\beta = -9}$$