

7.23 1)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 2} - \alpha x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - \alpha x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \alpha x \right) \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \alpha x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \alpha \right) = \\
 &= (-\infty) \left(-\sqrt{4 + 0 - 0} - \alpha \right) = (-\infty) (-2 - \alpha)
 \end{aligned}$$

Οπότε $(-2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < -2)$

- Αν $\boxed{\alpha < -2} \Rightarrow -\alpha - 2 > 0$, τότε $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$
- Αν $\boxed{\alpha > -2} \Rightarrow -\alpha - 2 < 0$, τότε $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$
- Αν $\boxed{\alpha = -2}$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 2} + 2x \quad \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε και} \\ \text{διααιρούμε με την συζυγή} \\ \text{παράσταση} \end{array} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + x + 2} + 2x)(\sqrt{4x^2 + x + 2} - 2x)}{\sqrt{4x^2 + x + 2} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 2}^2 - (2x)^2}{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2x} = \\
 &\stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{4x^2} + x + 2 - \cancel{4x^2}}{-x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2 \right)} = \frac{1 + 0}{-2 - 2} = \boxed{-\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

7.23 2)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x + 3} - \alpha x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} - \alpha x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} - \alpha x \right) \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} - \alpha x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} - \alpha \right) = \\
 &= (+\infty) \left(\sqrt{4 + 0 - 0} - \alpha \right) = (+\infty) (2 - \alpha)
 \end{aligned}$$

Οπότε $(2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 2)$

- Αν $\boxed{\alpha < 2} \Rightarrow 2 - \alpha > 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{+\infty}$
- Αν $\boxed{\alpha > 2} \Rightarrow 2 - \alpha < 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{-\infty}$

- Αν $\boxed{\alpha=2}$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x + 3} - 2x \right) \overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε και} \\ \text{διαιρούμε με την συζυγή} \\ \text{παράσταση}}}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 8x + 3} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 8x + 3} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 8x + 3} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 8x + 3}^2 - (2x)^2}{|x| \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2x} = \\
 & \overset{|x| = x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} + 8x + 3 - \cancel{4x^2}}{x \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(8 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{8}{2+2} = \boxed{2}
 \end{aligned}$$

7.23 3)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} + \lambda x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} + \lambda x \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \lambda x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \lambda x \right] \overset{|x| = -x}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \lambda x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \lambda \right) = \\
 &= (-\infty) \left(-\sqrt{1+0-0} + \lambda \right) = (-\infty)(\lambda - 1)
 \end{aligned}$$

Οπότε

Αν $\boxed{\lambda < 1} \Rightarrow \lambda - 1 < 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{+\infty}$

Αν $\boxed{\lambda > 1} \Rightarrow \lambda - 1 > 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{-\infty}$

Αν $\boxed{\lambda = 1}$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} + x \right) \overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε και} \\ \text{διαιρούμε με την συζυγή} \\ \text{παράσταση}}}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 3} + x)(\sqrt{x^2 + x + 3} - x)}{\sqrt{x^2 + x + 3} - x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}^2 - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - x} \overset{|x| = -x}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + x + 3 - \cancel{x^2}}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right)} = \frac{1+0}{-1-1} = \boxed{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

7.23 4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\lambda x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(\lambda + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2} \sqrt{\lambda + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{\lambda + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \stackrel{x>0}{|x|=x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{\lambda + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\lambda + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \\
&= (+\infty) (\sqrt{\lambda + 0 + 0} - \sqrt{1 + 0}) = (+\infty) (\sqrt{\lambda} - 1)
\end{aligned}$$

Οπότε

Αν $\boxed{0 < \lambda < 1} \Rightarrow \sqrt{\lambda} - 1 < 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{-\infty}$

Αν $\boxed{\lambda > 1} \Rightarrow \sqrt{\lambda} - 1 > 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{+\infty}$

Αν $\boxed{\lambda = 1}$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right) \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε και} \\ \text{διαιρούμε με την συζυγή} \\ \text{παράσταση}}{=} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right) \left(\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 1} \right)}{\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}^2 - \sqrt{x^2 + 1}^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \stackrel{x>0}{|x|=x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{2}} + 2x + \cancel{1} - x^{\cancel{2}} - \cancel{1}}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = \frac{2}{\sqrt{1 + 0 + 0} + \sqrt{1 + 0}} = \boxed{1}
\end{aligned}$$