

7.21 1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(\lambda^2 - 4)x^3 + (\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 3 \right] \overset{\substack{\text{μεγιστοβάθμιοι} \\ \text{όροι μόνο}}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\lambda^2 - 4)x^3 = (\lambda^2 - 4)(-\infty)$$

Οπότε (το τριώνυμο $\lambda^2 - 4$ έχει ρίζες τις $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 2$)

- Αν $\lambda < -2$ ή $\lambda > 2$, το ζητούμενο όριο είναι $-\infty$
- Αν $-2 < \lambda < 2 \Rightarrow \lambda^2 - 4 < 0$, το ζητούμενο όριο είναι $+\infty$
- Αν $\lambda = -2 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(\lambda^2 - 4)x^3 + (\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 3 \right] &\overset{\lambda = -2}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[((-2)^2 - 4)x^3 + (-2 - 2)x^2 - 2(-2)x + 3 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2 + 4x + 3) \overset{\substack{\text{κρατάμε μόνο τους} \\ \text{μεγιστοβάθμιους όρους}}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2) = -\infty \end{aligned}$$

- Αν $\lambda = 2 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(\lambda^2 - 4)x^3 + (\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 3 \right] &\overset{\lambda = 2}{=} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(2^2 - 4)x^3 + (2 - 2)x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 3 \right] &= \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x + 3) \overset{\substack{\text{κρατάμε μόνο τους} \\ \text{μεγιστοβάθμιους όρους}}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x) &= +\infty \end{aligned}$$

7.21 2)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(\lambda - 1)x^3 + \lambda x^2 - 2x + 1 \right] \overset{\substack{\text{κρατάμε μόνο τους} \\ \text{μεγιστοβάθμιους όρους}}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda - 1)x^3] = \boxed{(\lambda - 1)(-\infty)}$$

Οπότε (το $\lambda - 1$ έχει ρίζα το $\lambda_1 = 1$)

Αν $\boxed{\lambda > 1} \Rightarrow \lambda - 1 > 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{-\infty}$

Αν $\boxed{\lambda < 1} \Rightarrow \lambda - 1 < 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{+\infty}$

Αν $\boxed{\lambda = 1} \Rightarrow \lambda - 1 = 0$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(\lambda - 1)x^3 + \lambda x^2 - 2x + 1 \right] &\overset{\lambda = 1}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(1 - 1) \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 - 2x + 1 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] = (+\infty)(1 - 0 - 0) = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

7.21 3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2\lambda - 8)x^4 - (\lambda - 1)x^2 + \lambda x - 2 \right] \overset{\substack{\text{κρατάμε μόνο τους} \\ \text{μεγιστοβάθμιους όρους}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\lambda - 8)x^4 = \boxed{(2\lambda - 8)(+\infty)}$$

Οπότε (το $2\lambda - 8$ έχει ρίζα το $\lambda_1 = 4$)

Αν $\boxed{\lambda > 4} \Rightarrow 2\lambda - 8 > 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{+\infty}$

Αν $\boxed{\lambda < 4} \Rightarrow 2\lambda - 8 < 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{-\infty}$

Αν $\boxed{\lambda = 4} \Rightarrow 2\lambda - 8 = 0$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2\lambda - 8)x^4 - (\lambda - 1)x^2 + \lambda x - 2] \stackrel{\lambda=4}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2 \cdot 4 - 8)x^4 - (4 - 1)x^2 + 4x - 2] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + 4x - 2) \stackrel{\text{κρατάμε μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2) = -3(+\infty) = \boxed{-\infty}$$

7.21 4)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 1)x^3 + (2\lambda + 2)x^2 - 3x + \lambda] \stackrel{\text{κρατάμε μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\lambda^2 - 1)x^3 = \boxed{(\lambda^2 - 1)(-\infty)}$$

Οπότε (το τριώνυμο $\lambda^2 - 1$ έχει ρίζες τις $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 1$)

- Αν $\lambda < -1$ ή $\lambda > 1 \Rightarrow \lambda^2 - 1 > 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{-\infty}$
- Αν $-1 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda^2 - 1 < 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{+\infty}$
- Αν $\lambda = -1 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 1)x^3 + (2\lambda + 2)x^2 - 3x + \lambda] \stackrel{\lambda=-1}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [((-1)^2 - 1)x^3 + (2(-1) + 2)x^2 - 3x - 1] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x - 1) \stackrel{\text{κρατάμε μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x) = \boxed{+\infty}$$

- Αν $\lambda = 1 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 1)x^3 + (2\lambda + 2)x^2 - 3x + \lambda] \stackrel{\lambda=1}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [(1^2 - 1)x^3 + (2 \cdot 1 + 2)x^2 - 3x + 1] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 3x + 1) \stackrel{\text{κρατάμε μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2) = \boxed{+\infty}$$

7.21 5)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^4 - (2\lambda - 4)x^3 + x + 1] \stackrel{\text{κρατάμε μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^4 =$$

$$= \boxed{(\lambda^2 - 5\lambda + 6)(+\infty)}$$

Οπότε (το τριώνυμο $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ έχει ρίζες τις $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$)

- Αν $\lambda < 2$ ή $\lambda > 3 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 > 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{+\infty}$
- Αν $2 < \lambda < 3 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 < 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{-\infty}$
- Αν $\lambda = 2 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^4 - (2\lambda - 4)x^3 + x + 1] \stackrel{\lambda=2}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^2 - 5 \cdot 2 + 6)x^4 - (2 \cdot 2 - 4)x^3 + x + 1] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) \stackrel{\text{κρατάμε μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = \boxed{+\infty}$$

- Αν $\lambda = 3 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^4 - (2\lambda - 4)x^3 + x + 1] \stackrel{\lambda=3}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(3^2 - 5 \cdot 3 + 6 \right) x^4 - \left(2 \cdot 3 - 4 \right) x^3 + x + 1 \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x^3 + x + 1 \right) \overset{\substack{\text{κρατάμε μόνο τους} \\ \text{μεγιστοβάθμιους όρους}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x^3 \right) = \boxed{-\infty}$$