

7.16 1)

Σπάμε το $5x$ έτσι ώστε να δημιουργήσουμε δύο απροσδιόριστες μορφές

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 6x} + \sqrt{4x^2 + 8x + 3} - 5x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sqrt{9x^2 + 6x} - 3x \right) + \left(\sqrt{4x^2 + 8x + 3} - 2x \right) \right] \quad (1)$$

Όμως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 6x} - 3x \right) & \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 6x} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 6x} + 3x)}{\sqrt{9x^2 + 6x} + 3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 6x}^2 - (3x)^2}{|x| \sqrt{9 + \frac{6}{x}} + 3x} \stackrel{x > 0 \Rightarrow |x| = x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{9x^2} + 6x - \cancel{9x^2}}{x \sqrt{9 + \frac{6}{x}} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{6x}}{\cancel{x} \left(\sqrt{9 + \frac{6}{x}} + 3 \right)} = \\ &= \frac{6}{\sqrt{9+0} + 3} = \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 6x} - 3x \right) = 1 \quad (2)$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x + 3} - 2x \right) & \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 8x + 3} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 8x + 3} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 8x + 3} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 8x + 3}^2 - (2x)^2}{|x| \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2x} \stackrel{x > 0 \Rightarrow |x| = x}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} + 8x + 3 - \cancel{4x^2}}{x \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(8 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2 \right)} = \\ &= \frac{8+0}{\sqrt{4+0+0} + 2} = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x + 3} - 2x \right) = 2 \quad (3)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} (1) & \stackrel{(2), (3)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 6x} + \sqrt{4x^2 + 8x + 3} - 5x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 6x} - 3x \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x + 3} - 2x \right) = 1 + 2 = \boxed{3} \end{aligned}$$

7.16 2)

Σπάμε το $3x$ έτσι ώστε να δημιουργήσουμε δύο απροσδιόριστες μορφές

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 3} + 3x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x \right) + \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x \right) \right] \quad (1)$$

Όμως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x \right) & \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x \right) \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x \right)}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}^2 - (2x)^2}{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x} \stackrel{x < 0}{|x| = -x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{4x^2} + x + 1 - \cancel{4x^2}}{-x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right)} = \frac{1 + 0}{-\sqrt{4 + 0 + 0} - 2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x \right) = -\frac{1}{4} \quad (2)$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x \right) & \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x \right) \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x \right)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}^2 - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - x} \stackrel{x < 0}{|x| = -x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2x + 3 - \cancel{x^2}}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right)} = \frac{2 + 0}{-1 - 1} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x \right) = -1 \quad (3)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} (1) & \stackrel{(2), (3)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 3} + 3x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x \right) = -\frac{1}{4} - 1 = \boxed{-\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

7.16 3)

Σπάμε το $2x$ έτσι ώστε να δημιουργήσουμε δύο απροσδιόριστες μορφές

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 3x + 4} - 2x}{\sqrt{4x^2 + 3x + 2} - 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \cancel{x} + \sqrt{x^2 + 3x + 4} - \cancel{x}}{\sqrt{4x^2 + 3x + 2} - 2x} \quad (1)$$

Όμως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) & \overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε} \\ \text{με την συζυγή παράσταση}}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}^2 - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} \overset{|x| = x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + x + 1 - \cancel{x^2}}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x \right) & \overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε} \\ \text{με την συζυγή παράσταση}}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x \right) \left(\sqrt{x^2 + 3x + 4} + x \right)}{\sqrt{x^2 + 3x + 4} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 4}^2 - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 3x + 4 - \cancel{x^2}}{x \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(3 + \frac{4}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{3 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x \right) = \frac{3}{2} \quad (3)$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 2} - 2x \right) & \overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε} \\ \text{με την συζυγή παράσταση}}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 3x + 2} - 2x \right) \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 2} + 2x \right)}{\sqrt{4x^2 + 3x + 2} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 2}^2 - (2x)^2}{|x| \sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2x} \overset{|x| = x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} + 3x + 2 - \cancel{4x^2}}{x \sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2x} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(3 + \frac{2}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{3+0}{\sqrt{4+0+0}+2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 2} - 2x \right) = \frac{3}{4} \quad (4)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} (1) \quad & \stackrel{(2), (3), (4)}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 3x + 4} - 2x}{\sqrt{4x^2 + 3x + 2} - 2x}} = \\ & = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 2} - 2x \right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$