

7.15 1)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - 3x \right) \stackrel{x>0}{|x|=x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - 3x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - 3 \right) \right] = (+\infty)(\sqrt{9+0-0} - 3) = (+\infty) \cdot 0$$

δηλαδή οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση
Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1}^2 - (3x)^2}{x\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{9x^2} + 1 - \cancel{9x^2}}{x \left(\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + 3 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + 3 \right)} = \frac{1}{(+\infty)(\sqrt{9+0} + 3)} = \frac{1}{(+\infty) \cdot 6} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$$

7.15 2)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x \right) \stackrel{x>0}{|x|=x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) \right] = (+\infty)(\sqrt{4+0+0} - 2) = (+\infty) \cdot 0$$

δηλαδή οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση
Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x)(\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}^2 - (2x)^2}{x\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} + x + 1 - \cancel{4x^2}}{x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{1+0}{\sqrt{4+0+0} + 2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

7.15 3)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + x \right) \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 \right) \right] = (-\infty)(-\sqrt{1+0+0}+1) = (-\infty) \cdot 0$$

δηλαδή οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση
Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} + x \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 3} + x)(\sqrt{x^2 + x + 3} - x)}{\sqrt{x^2 + x + 3} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}^2 - x^2}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + x + 3 - \cancel{x^2}}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right)} = \frac{1+0}{-\sqrt{1+0+0}-1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

7.15 4)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{5}{x} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{5}{x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - |x| \sqrt{1 + \frac{5}{x}} \right) \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x \sqrt{1 + \frac{5}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{5}{x}} \right) =$$

$$(+\infty) \cdot (1 - \sqrt{1+0}) = (+\infty) \cdot 0$$

δηλαδή οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση
Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 5x})(x + \sqrt{x^2 + 5x})}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x^2 + 5x}^2}{x + x \sqrt{1 + \frac{5}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 5x}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5\cancel{x}}{\cancel{x} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}} \right)} =$$

$$= \frac{-5}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

7.15 5)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - (-x) \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \\
&= (-\infty) \left(-\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0} \right) = (-\infty) \cdot 0
\end{aligned}$$

δηλαδή οδηγούμεμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση
Έχουμε

$$\begin{aligned}
\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right) \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1} \right)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}^2 - \sqrt{x^2 - 1}^2}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} + 1}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)} = \frac{2}{(-\infty) \left(-\sqrt{1 + 0} - \sqrt{1 - 0} \right)} = \frac{2}{+\infty} = \boxed{0}
\end{aligned}$$

7.15 6)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \right) \stackrel{x > 0}{|x| = x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = (+\infty) \left(\sqrt{1 + 0} - 1 \right) = (+\infty) \cdot 0
\end{aligned}$$

δηλαδή οδηγούμεμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση
Έχουμε

$$\begin{aligned}
\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) x \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)}{x \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\sqrt{x^2 + 1}^2 - x^2 \right)}{x \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} \right)}{\cancel{x^2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

7.15 7)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \right)} - \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 \right)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{x^2} \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - |x| \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} \right) \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + x \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} \right) = \\
&= (-\infty)(-1+1) = (-\infty) \cdot 0
\end{aligned}$$

δηλαδή οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})}{\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x+x^2}^2 - \sqrt{1-x+x^2}^2}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - x\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{1} + x + \cancel{x^2} - \cancel{1} + x - \cancel{x^2}}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - x\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x} \left(-\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} \right)} = \frac{2}{-\sqrt{0+0+1} - \sqrt{0-0+1}} = \frac{2}{-2} = \boxed{-1}
\end{aligned}$$

7.15 8)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 3} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} + 2x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2x \right) \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2 \right) = (+\infty)(\sqrt{4+0+0} + 2) = (+\infty) \cdot 4 = \boxed{+\infty}
\end{aligned}$$

7.15 9)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = (-\infty) \left(-\sqrt{1+0+0} + \sqrt{1+0} \right) = (-\infty) \cdot 0$$

δηλαδή οδηγούμεστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση
Έχουμε

$$\begin{aligned} & \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 + 1} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 + 1} \right) \left(\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + 1} \right)}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}^2 - \sqrt{x^2 + 1}^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + x + 3 - \cancel{x^2} - 1}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = \\ &= \frac{1+0}{-\sqrt{1+0+0} - \sqrt{1+0}} = \boxed{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

7.15 10)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 5x + 1} + 3x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + 3x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2} \sqrt{9 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{9 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3x \right) \stackrel{x < 0}{|x| = -x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{9 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{9 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3 \right) = (-\infty) \left(-\sqrt{9+0+0} + 3 \right) = (-\infty) \cdot 0 \end{aligned}$$

δηλαδή οδηγούμεστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση
Έχουμε

$$\begin{aligned} & \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 5x + 1} + 3x \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x + 1}^2 - (3x)^2}{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{9x^2} + 5x + 1 - \cancel{9x^2}}{-x\sqrt{9 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3x} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(5 + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{9 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 \right)} = \frac{5+0}{-\sqrt{9+0+0}-3} = \boxed{-\frac{5}{6}}$$

7.15 11)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + |x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} \right) \stackrel{x < 0}{|x| = -x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} \right) = (-\infty) \left(1 - \sqrt{1 - 0 + 0} \right) = (-\infty) \cdot 0 \end{aligned}$$

δηλαδή οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση
Έχουμε

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right) \left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right)}{x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 5}^2}{x + x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x - 5}{x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(2 - \frac{5}{x} \right)}{\cancel{x} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(2 - \frac{5}{x} \right)}{\cancel{x} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} \right)} = \frac{2-0}{1+\sqrt{1-0+0}} = \frac{2}{2} = \boxed{1} \end{aligned}$$

7.15 12)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 5 \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x - 5 \right) \stackrel{x > 0}{|x| = x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x - 5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{5}{x} \right) = \\ &= (+\infty) \left(\sqrt{1+0+0} - 1 - 0 \right) = (+\infty) \cdot 0 \end{aligned}$$

δηλαδή οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση
(αφήνουμε έξω το 5 για λιγότερες πράξεις)

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 5 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} - 5 =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + x}} - 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + x + 1 - \cancel{x^2}}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + x}} - 5 = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} - 5 = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} - 5 = \frac{1}{2} - 5 = \boxed{-\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

7.15 13)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{\sqrt{x^2 - x} - x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x} \stackrel{x>0}{|x|=x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x}{x \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 1\right)} = \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

δηλαδή οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τις συζυγείς παραστάσεις

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{\sqrt{x^2 - x} - x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)(\sqrt{x^2 - x} + x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x}^2 - x^2\right)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\left(\sqrt{x^2 - x}^2 - x^2\right)(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}) \left(x \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + x\right)}{(\cancel{x^2} - x - \cancel{x^2}) \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)}{-\cancel{x^2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{\sqrt{1-0}+1}{-(\sqrt{1-0}+1)} = \boxed{-1}
\end{aligned}$$

7.15 14)

Παρατηρούμε ότι αν δουλέψουμε κατά τα γνωστά θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x - |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \stackrel{x>0}{|x|=x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x - x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{1 - \sqrt{1+0+0}}{1 - \sqrt{1-0+0}} = \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

δηλαδή οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τις συζυγείς παραστάσεις

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + x + 1})(x + \sqrt{x^2 + x + 1})(x + \sqrt{x^2 - x + 1})}{(x - \sqrt{x^2 - x + 1})(x + \sqrt{x^2 + x + 1})(x + \sqrt{x^2 - x + 1})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - \sqrt{x^2 + x + 1}^2)(x + \sqrt{x^2 - x + 1})}{(x^2 - \sqrt{x^2 - x + 1}^2)(x + \sqrt{x^2 + x + 1})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x - 1)(x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}})}{(x^2 - x + 1)(x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(-1 - \frac{1}{x}\right)x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)x\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{(-1-0)(1+\sqrt{1-0+0})}{(1-0)(1+\sqrt{1+0+0})} = -\frac{2}{2} = \boxed{-1}
 \end{aligned}$$