6.8 1)

α) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+3x}{|x|-1}\overset{\substack{x\to 1^+\Rightarrow x>0\Rightarrow\\ \Rightarrow |x|=x}}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+3x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+3x\right)\cdot\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=4\cdot(+\infty)=\boxed{+\infty}$

β) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+2x+4}{|x+3|-1}\overset{x\to -2\Rightarrow x+3>0\Rightarrow|x+3|=x+3}{=}\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+2x+4}{x+3-1}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+2x+4}{x+2}=$

$=\lim\limits_{x\to -2}\left(2x^2+2x+4\right)\cdot\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x+2}=\left[2(-2)^2+2(-2)+4\right]\cdot\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x+2}=$

$=8\cdot\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x+2}=\begin{cases}\overset{\text{Αν } x>-2}{\nearrow} & 8\cdot\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{x+2}=+\infty\\ \overset{\text{Αν } x<-2}{\searrow} & 8\cdot\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{1}{x+2}=-\infty\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+2x+4}{|x+3|-1}$ δεν υπάρχει

6.8 2)

$\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2+1}{|x|-2}\overset{x\to -2^+\Rightarrow x<0\Rightarrow|x|=-x}{=}\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2+1}{-x-2}=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(-\dfrac{x^2+1}{x+2}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to -2^+}\left[-\left(x^2+1\right)\right]\cdot\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{x+2}=-\left[(-2)^2+1\right](+\infty)=-5(+\infty)=\boxed{-\infty}$

6.8 3)

$\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{x^2+2x-1}{|x|-5}\overset{x\to -5^-\Rightarrow x<0\Rightarrow|x|=-x}{=}\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{x^2+2x-1}{-x-5}=\lim\limits_{x\to -5^-}\left(-\dfrac{x^2+2x-1}{x+5}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to -5^-}\left[-\left(x^2+2x-1\right)\right]\cdot\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{1}{x+5}=-\left[(-5)^2+2(-5)-1\right]\cdot(-\infty)=$

$=-14\cdot(-\infty)=\boxed{+\infty}$

6.8 4)

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+7}{\left|x^2+2x\right|-3}\overset{\lim\limits_{x\to -3}\left(x^2+2x\right)=3>0\Rightarrow\left|x^2+2x\right|=x^2+2x}{=}\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+7}{x^2+2x-3}\overset{x^2+2x-3=(x+3)(x-1)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+7}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+7}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{2(-3)+7}{(-3)-1}\cdot\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{x+3}=$

$=-\dfrac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{x+3}=$

$=\begin{cases}\overset{\text{Αν } x>-3}{} & -\dfrac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{1}{x+3}=-\dfrac{1}{4}\cdot(+\infty)=-\infty\\ \overset{\text{Αν } x<-3}{} & -\dfrac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{1}{x+3}=-\dfrac{1}{4}\cdot(-\infty)=+\infty\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+7}{\left|x^2+2x\right|-3}$ δεν υπάρχει

6.8 5)

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-2x+1}{|x|-1}\overset{x\to -1^+\Rightarrow x<0\Rightarrow |x|=-x}{=}\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-2x+1}{-x-1}=\lim_{x\to -1^+}\left(-\frac{x^2-2x+1}{x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\left[-\left(x^2-2x+1\right)\right]\cdot\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}=-\left[(-1)^2-2(-2)+1\right]\cdot(+\infty)=$$

$$=-6\cdot(+\infty)=\boxed{-\infty}$$

6.8 6)

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1}(3x+1)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}\overset{|x-1|>0\Rightarrow\lim\frac{1}{|x-1|}=+\infty}{=}(3\cdot 1+1)\cdot(+\infty)=4\cdot(+\infty)=\boxed{+\infty}$$

6.8 7)

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|+1}{x^2-5x+6}\overset{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|+1}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|+1}{x-3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=$$

$$=\frac{|2-2|+1}{2-3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=-1\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=$$

$$=\left.\begin{array}{l}\overset{\text{Αν } x>2}{=}\ -1\cdot\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=-1(+\infty)=-\infty\\ \\ \overset{\text{Αν } x<2}{=}\ -1\cdot\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-1(-\infty)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|+1}{x^2-5x+6}\quad\text{δεν υπάρχει}$$