Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

6.7 1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)^3}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{x}+1}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)^3(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}^2-1}{(x-1)^3(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{(x-1)^{\cancel{3}2}(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot(+\infty)=\boxed{+\infty}$$

6.7 2)

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{(x-1)^3}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } 2+\sqrt{x+3}}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(x-1)^3(2+\sqrt{x+3})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2^2-\sqrt{x+3}^2}{(x-1)^3(2+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to 1}\frac{4-x-3}{(x-1)^3(2+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)^3(2+\sqrt{x+3})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{3}2}(2+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2+\sqrt{x+3}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{2+\sqrt{1+3}}\cdot(+\infty)=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot(+\infty)=\boxed{-\infty}$$

6.7 3)

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{2x}-2}{(x-2)^2}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{2x}+2}}{=}\lim_{x\to 2^-}\frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x-2)^2(\sqrt{2x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{2x}^2-2^2}{(x-2)^2(\sqrt{2x}+2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-4}{(x-2)^2(\sqrt{2x}+2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}}(\sqrt{2x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{\sqrt{2x}+2}\cdot\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=\frac{2}{\sqrt{2\cdot 2}+2}\cdot(-\infty)=\frac{1}{2}\cdot(+\infty)=\boxed{+\infty}$$

6.7 4)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{(x-2)^3}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{x^2+5+3}}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)^3(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}^2-3^2}{(x-2)^3(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)^3(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)^3(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x-2)^{\cancel{3}2}(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{2+2}{\sqrt{2^2+5}+3}\cdot(+\infty)=\frac{4}{6}\cdot(+\infty)=\boxed{+\infty}$$

6.7 5)

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-8\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)^3}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\sqrt{x}\\ \text{οπότε } x=y^2\\ \text{όταν } x\to4\text{ , } y\to2}}{=}\lim_{y\to2}\frac{y^4-8y}{(y-2)^3}=\lim_{y\to2}\frac{y\left(y^3-8\right)}{(y-2)^3}=\lim_{y\to2}\frac{y\cancel{(y-2)}\left(y^2+y+2\right)}{(y-2)^{\cancel{3}2}}=$$

$$=\lim_{y\to2}y\left(y^2+y+2\right)\cdot\lim_{y\to2}\frac{1}{(y-2)^2}=2\left(2^2+2+2\right)\cdot(+\infty)=16\cdot(+\infty)=\boxed{+\infty}$$

6.7 6)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή}\\ \text{με } \left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}^2-2^2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left[\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\right]^2\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=\lim_{x\to1^-}\frac{\left(x^2+3x-4\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}^2-1\right)^2\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=$$

$$\overset{x^2+3x-4=(x-1)(x+4)}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+4)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{(x-1)^{\cancel{2}}\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x+4)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=$$

$$=\frac{(1+4)\left(\sqrt{1}+1\right)^2}{\left(\sqrt{1^2+3\cdot1}+2\right)}\cdot(-\infty)=\frac{20}{4}\cdot(-\infty)=\boxed{-\infty}$$