6.4 1)

α) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x+5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x+5}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x+5}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x+1}=$

$=\dfrac{-1+5}{-1-1}\cdot(-\infty)=-2(-\infty)=\boxed{+\infty}$

β) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-2x+6}{2x^2+5x-3}\overset{2x^2+5x-3=2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x+3)(2x-1)}{=}\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-2x+6}{2x-1}\cdot\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{x+3}=$

$=-\dfrac{12}{7}\cdot\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{x+3}=\begin{cases}\text{Αν } x>-3: & -\dfrac{12}{7}\cdot\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{1}{x+3}=-\dfrac{12}{7}\cdot(+\infty)=-\infty\\ \text{Αν } x<-3: & -\dfrac{12}{7}\cdot\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{1}{x+3}=-\dfrac{12}{7}\cdot(-\infty)=+\infty\end{cases}$

Άρα το $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-2x+6}{2x^2+5x-3}$ δεν υπάρχει

γ) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3x^3-1}{x^3-x^2-x+1}\overset{\text{παραγοντοποίηση με Horner}}{=}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3x^3-1}{(x+1)(x-1)^2}$

$=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3x^3-1}{(x-1)^2}\cdot\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3(-1)^3-1}{(-1-1)^2}\cdot(-\infty)=\dfrac{-4}{4}\cdot(-\infty)=\boxed{+\infty}$

6.4 2)

$\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{-2x+7}{2x-10}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{-2x+7}{2(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{-2x+7}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{-2\cdot 5+7}{2}\cdot(+\infty)=$

$=-\dfrac{3}{2}\cdot(+\infty)=-\infty$

6.4 3)

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{9-x}{21-3x}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{9-x}{-3(x-7)}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{9-x}{-3}\cdot\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{x-7}=\dfrac{2}{-3}\cdot\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{x-7}=$

$=\begin{cases}\text{Αν } x>7: & -\dfrac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 7^+}\dfrac{1}{x-7}=-\dfrac{2}{3}\cdot(+\infty)=-\infty\\ \text{Αν } x<7: & -\dfrac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 7^-}\dfrac{1}{x-7}=-\dfrac{2}{3}\cdot(-\infty)=+\infty\end{cases}$

Άρα το $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{9-x}{21-3x}$ δεν υπάρχει

6.4 4)

$\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2+3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2+3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2+3}{x-3}\cdot\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{12}{-6}\cdot\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{1}{x+3}=$

$=-2\cdot(+\infty)=\boxed{-\infty}$

6.4 5)

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+1}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+1}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+1}{x+2}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{7}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=$

$$= \begin{array}{l} \text{Αν } x>2 \\ \nearrow \\ \searrow \\ \text{Αν } x<2 \end{array} \begin{array}{l} \frac{7}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\frac{7}{4}\cdot(+\infty)=+\infty \\ \\ \frac{7}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=\frac{7}{4}\cdot(-\infty)=-\infty \end{array}$$

Άρα το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+1}{x^2-4}$ δεν υπάρχει

6.4 6)

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+x+3}{x^2+8x+16}=\lim_{x\to -4}\frac{x^2+x+3}{(x+4)^2}=\lim_{x\to -4}\left(x^2+x+3\right)\cdot\lim_{x\to -4}\frac{1}{(x+4)^2}$$

$$=\left[(-4)^2-4+3\right]\cdot(+\infty)=15\cdot(+\infty)=\boxed{+\infty}$$

6.4 7)

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{4x+2}{2x^2-7x-4}\overset{2x^2-7x-4=(2x+1)(x-4)}{=}\lim_{x\to 4^-}\frac{4x+2}{(2x+1)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 4^-}\frac{4x+2}{2x+1}\cdot\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{x-4}=\frac{4\cdot 4+2}{2\cdot 2+1}\cdot(-\infty)=2\cdot(-\infty)=\boxed{-\infty}$$

6.4 8)

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x+1}{x^2+x-2}\overset{x^2+x-2=(x-1)(x+2)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{6x+1}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{6x+1}{x+2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\frac{7}{3}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=$$

$$= \begin{array}{l} \text{Αν } x>1 \\ \nearrow \\ \searrow \\ \text{Αν } x<1 \end{array} \begin{array}{l} \frac{7}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\frac{7}{3}\cdot(+\infty)=+\infty \\ \\ \frac{7}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\frac{7}{3}\cdot(-\infty)=-\infty \end{array}$$

Άρα το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x+1}{x^2+x-2}$ δεν υπάρχει

6.4 9)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4x+4}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\left(x^2-4x+4\right)\cdot\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)^2}=$$

$$=\left[(-2)^2-4(-2)+4\right]\cdot(+\infty)=12\cdot(+\infty)=\boxed{+\infty}$$

6.4 10)

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to -5}\frac{2x-1}{x^3+125}=\lim_{x\to -5}\frac{2x-1}{(x+5)\left(x^2-10x+10\right)}=\lim_{x\to -5}\frac{2x-1}{x^2-10x+10}\cdot\lim_{x\to -5}\frac{1}{x+5}=$$

$$=\frac{2(-5)-1}{(-5)^2-10(-5)+10}\cdot\lim_{x\to -5}\frac{1}{x+5}=\frac{-11}{85}\lim_{x\to -5}\frac{1}{x+5}=$$

$$= \left.\begin{array}{l} \overset{\text{Αν } x>-5}{=}\ \frac{-11}{85}\lim\limits_{x\to -5^+}\frac{1}{x+5}=\frac{-11}{85}\cdot(+\infty)=-\infty \\ \\ \overset{\text{Αν } x<-5}{=}\ \frac{-11}{85}\lim\limits_{x\to -5^-}\frac{1}{x+5}=\frac{-11}{85}\cdot(-\infty)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -5}\frac{2x-1}{x^3+125} \text{ δεν υπάρχει}$$

6.4 11)

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+2}{x^3-3x^2+4} \overset{\substack{x^3-3x^2+4:\ \text{ρίζα το } x=2\\ \text{παραγοντοποίηση με Horner}}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{3x+2}{(x-2)^2(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{3x+2}{x+1}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{3\cdot 2+2}{2+1}\cdot(+\infty) = \frac{8}{3}\cdot(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

6.4 12)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x+5}{x^3+x^2-x+2} \overset{\substack{x^3+x^2-x+2:\ \text{ρίζα το } x=-2\\ \text{παραγοντοποίηση με Horner}}}{=} \lim_{x\to -2}\frac{x^2+x+5}{(x+2)(x^2-x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{x^2+x+5}{x^2-x+1}\cdot\lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2} = \frac{(-2)^2-2+5}{(-2)^2-(-2)+1}\cdot\lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2} = \frac{7}{7}\cdot\lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2} =$$

$$= \begin{cases} \overset{\text{Αν } x>-5}{=} \dfrac{-11}{85}\lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{1}{x+5} = \dfrac{-11}{85}\cdot(+\infty) = -\infty \\ \overset{\text{Αν } x<-5}{=} \dfrac{-11}{85}\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{1}{x+5} = \dfrac{-11}{85}\cdot(-\infty) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -5}\frac{2x-1}{x^3+125} \text{ δεν υπάρχει}$$

6.4 13)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{x^3-3x^2+4} \overset{\substack{x^3-3x^2+4:\ \text{ρίζα το } x=2\\ \text{παραγοντοποίηση με Horner}}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{(x-2)^2(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} == \frac{2^2+2+1}{2+1}\cdot(+\infty) = \frac{7}{3}\cdot(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

6.4 14)

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x+3}{x^4-x^3-x+1} \overset{\substack{x^4-x^3-x+1:\ \text{ρίζα το } x=1\\ \text{παραγοντοποίηση με Horner}}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x+3}{x^2+x+1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{3\cdot 1^2+1+3}{1^2+1+1}\cdot(+\infty) = \frac{7}{3}(+\infty) = \boxed{+\infty}$$