

6.35

Θέτουμε $h(x) = 2f(x) - f(-x)$ (1), οπότε προφανώς $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$

και $h(-x) = 2f(-x) - f(x)$ (2)

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow 0} h(-x) \overset{\substack{\text{θέτουμε } y = -x \\ \text{όταν } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} h(y) = +\infty$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} h(x) = 2f(x) - f(-x) \\ h(-x) = 2f(-x) - f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2h(x) = 4f(x) - 2f(-x) \\ h(-x) = 2f(-x) - f(x) \end{cases} \overset{\substack{\text{προσθέτουμε} \\ \text{κατά μέλη}}}{\Rightarrow}$$

$$2h(x) + h(-x) = 3f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{2h(x) + h(-x)}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2h(x) + h(-x)}{3} \Rightarrow$$

$$\overset{\substack{\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(-x) = +\infty}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2h(x) + h(-x)}{3} = \frac{2(+\infty) + (+\infty)}{3} = \boxed{+\infty}$$