

6.29

$$\text{Θα πρέπει } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{x-1}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - 1} = 1^2 + 1 + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - 1} = 3$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x + \beta - 1) = \alpha \cdot 1 + \beta - 1 = \alpha + \beta - 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x + \beta - 1) = \alpha + \beta - 1$ ήταν διάφορο από το

μηδέν τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - 1}$ δεν θα μπορούσε να κάνει 3 (θα έκανε είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, είτε δεν θα υπήρχε)

Αναγκαία λοιπόν θα πρέπει (αλλά δεν θα αρκεί)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x + \beta - 1) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta - 1 = 0 \quad (1)$$

Εφόσον λοιπόν ισχύει η σχέση (1) το πολυώνυμο $\alpha x + \beta - 1$ έχει ρίζα το 1 και άρα παράγοντα το $x - 1$. Πράγματι

$$\alpha x + \beta - 1 \stackrel{(1) \Rightarrow \beta - 1 = -\alpha}{=} \alpha x - \alpha = \alpha(x - 1) \quad (2)$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - 1} = 3 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 3 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3}$$

$$\text{Τέλος } (1) \stackrel{\alpha=3}{\Rightarrow} \boxed{\beta = -2}$$