

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} [\alpha x^3 + (\beta + 1)x + \gamma + 2] = \alpha \cdot 2^3 + (\beta + 1) \cdot 2 + \gamma + 2 = 8\alpha + 2\beta + 2 + \gamma + 2 = 8\alpha + 2\beta + \gamma + 4$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 2 - 2 = 0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} [\alpha x^3 + (\beta + 1)x + \gamma + 2] = 8\alpha + 2\beta + \gamma + 4$

ήταν διάφορο από το μηδέν τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x^3 + (\beta + 1)x + \gamma + 2}{(x - 2)^2}$ δεν θα μπορούσε

να κάνει 6 (θα έκανε είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, είτε δεν θα υπήρχε)

Αναγκαία λοιπόν θα πρέπει (αλλά δεν θα αρκεί)

$$\lim_{x \rightarrow 2} [\alpha x^3 + (\beta + 1)x + \gamma + 2] = 0 \Rightarrow 8\alpha + 2\beta + \gamma + 4 = 0 \quad (1)$$

Εφόσον λοιπόν ισχύει η σχέση (1) το πολυώνυμο $\alpha x^3 + (\beta + 1)x + \gamma + 2$ έχει ρίζα το 2 και άρα παράγοντα το $x - 2$. Θα το παραγοντοποιήσουμε με το σχήμα Horner

α	0	$\beta + 1$	$\gamma + 2$	2
	2α	4α	$8\alpha + 2\beta + 2$	
	2α	$4\alpha + \beta + 1$	$8\alpha + 2\beta + \gamma + 4 = 0$	(1)

$$\text{Οπότε } \alpha x^3 + (\beta + 1)x + \gamma + 2 = (x - 2)(\alpha x^2 + 2\alpha x + 4\alpha + \beta + 1) \quad (2)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x^3 + (\beta + 1)x + \gamma + 2}{(x - 2)^2} &= 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x - 2)} (\alpha x^2 + 2\alpha x + 4\alpha + \beta + 1)}{(x - 2)^2} = 6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x^2 + 2\alpha x + 4\alpha + \beta + 1}{x - 2} = 6 \end{aligned}$$

Ομοίως με πριν θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\alpha x^2 + 2\alpha x + 4\alpha + \beta + 1) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 2^2 + 2\alpha \cdot 2 + 4\alpha + \beta + 1 = 0 \Rightarrow 12\alpha + \beta + 1 = 0 \quad (3)$$

Εφόσον λοιπόν ισχύει η σχέση (3) το πολυώνυμο $\alpha x^2 + 2\alpha x + 4\alpha + \beta + 1$ έχει ρίζα το 2 και άρα παράγοντα το $x - 2$. Θα το παραγοντοποιήσουμε με το σχήμα Horner

α	2α	$4\alpha + \beta + 1$	2
	2α	8α	
	4α	$12\alpha + \beta + 1 = 0$	(1)

$$\text{Οπότε } \alpha x^2 + 2\alpha x + 4\alpha + \beta + 1 = (x - 2)(\alpha x + 4\alpha) \quad (4)$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x^2 + 2\alpha x + 4\alpha + \beta + 1}{x - 2} = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x - 2)} (\alpha x + 4\alpha)}{\cancel{x - 2}} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot 2 + 4\alpha = 6 \Rightarrow 6\alpha = 6 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$\text{Οπότε } (3) \overset{\alpha=1}{\Rightarrow} \boxed{\beta=-13}$$

$$\text{Τέλος } (1) \overset{\alpha=1, \beta=-13}{\Rightarrow} \boxed{\gamma=14}$$