

6.16 1)

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 2\alpha x + \beta - 5 = 3^2 + 2\alpha \cdot 3 + \beta - 5 = 6\alpha + \beta + 4$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 3^2 - 9 = 0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 2\alpha x + \beta - 5 = 6\alpha + \beta + 4$ ήταν διάφορο

από το μηδέν τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2\alpha x + \beta - 5}{x^2 - 9}$ δεν θα μπορούσε να κάνει $\frac{1}{3}$ (θα έκανε είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, είτε δεν θα υπήρχε)

Αναγκαία λοιπόν θα πρέπει (αλλά δεν θα αρκεί)

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 2\alpha x + \beta - 5 = 0 \Rightarrow 6\alpha + \beta + 4 = 0 \quad (1)$$

Εφόσον λοιπόν ισχύει η σχέση (1) το τριώνυμο $x^2 + 2\alpha x + \beta - 5$ έχει ρίζα το 3 και άρα παράγοντα το $x-3$. Θα το παραγοντοποιήσουμε με το σχήμα Horner (μπορούμε βέβαια και με την μέθοδο παραγοντοποίησης τριωνύμου)

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2\alpha & \beta - 5 \\ & 3 & 6\alpha + 9 \\ \hline & & (1) \\ 1 & 2\alpha + 3 & 6\alpha + \beta + 4 = 0 \end{array}$$

$$\text{Οπότε } x^2 + 2\alpha x + \beta - 5 = (x - 3)(x + 2\alpha + 3) \quad (2)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2\alpha x + \beta - 5}{x^2 - 9} &= \frac{1}{3} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x + 2\alpha + 3)}{\cancel{(x-3)}(x + 3)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3 + 2\alpha + 3}{3 + 3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2\alpha + 6}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\alpha + 6 = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = -2} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Τέλος } (1) \Rightarrow \boxed{\beta = 8}$$

6.16 2)

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^4 + \alpha x + \beta = 1^4 + \alpha \cdot 1 + \beta = \alpha + \beta + 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} x^4 + \alpha x + \beta = \alpha + \beta + 1$ ήταν διάφορο από το

μηδέν τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + \alpha x + \beta}{x - 1}$ δεν θα μπορούσε να κάνει 3 (θα έκανε είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, είτε δεν θα υπήρχε)

Αναγκαία λοιπόν θα πρέπει (αλλά δεν θα αρκεί)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^4 + \alpha x + \beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + 1 = 0 \quad (1)$$

Εφόσον λοιπόν ισχύει η σχέση (1) το πολυώνυμο $x^4 + \alpha x + \beta$ έχει ρίζα το 1 και άρα παράγοντα το $x-1$. Θα το παραγοντοποιήσουμε με το σχήμα Horner

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \\ & 1 & 1 & 1 & \alpha+1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \alpha+1 & \alpha+\beta+1=0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ (1) \end{array}$$

$$\text{Οπότε } x^4 + \alpha x + \beta = (x-1)(x^3 + x^2 + x + \alpha + 1) \quad (2)$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + \alpha x + \beta}{x-1} = 3 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^3 + x^2 + x + \alpha + 1)}{\cancel{x-1}} = 3 \Rightarrow 1^3 + 1^2 + 1 + \alpha + 1 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + 4 = 3 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1} \quad (3)$$

$$\text{Τέλος } (1) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \boxed{\beta = 0}$$

6.16 3)

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^3 + \alpha x + 2\beta - 10 = 2 \cdot 2^3 + \alpha \cdot 2 + 2\beta - 10 = 2\alpha + 2\beta + 6$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 2^2 - 4 = 0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} 2x^3 + \alpha x + 2\beta - 10 = 2\alpha + 2\beta + 6$ ήταν

διάφορο από το μηδέν τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + \alpha x + 2\beta - 10}{x^2 - 4}$ δεν θα μπορούσε να κάνει

$$\frac{25}{4} \quad (\text{θα έκανε είτε } +\infty, \text{ είτε } -\infty, \text{ είτε δεν θα υπήρχε})$$

Αναγκαία λοιπόν θα πρέπει (αλλά δεν θα αρκεί)

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^3 + \alpha x + 2\beta - 10 = 0 \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 6 = 0 \quad (1)$$

Εφόσον λοιπόν ισχύει η σχέση (1) το πολυώνυμο $2x^3 + \alpha x + 2\beta - 10$ έχει ρίζα το 2 και άρα παράγοντα το $x-2$. Θα το παραγοντοποιήσουμε με το σχήμα Horner

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 0 & \alpha & 2\beta-10 & \\ & 4 & 8 & 2\alpha+16 & \\ \hline 2 & 4 & \alpha+8 & 2\alpha+2\beta+6=0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ (1) \end{array}$$

$$\text{Οπότε } 2x^3 + \alpha x + 2\beta - 10 = (x-2)(2x^2 + 4x + \alpha + 8) \quad (2)$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + \alpha x + 2\beta - 10}{x^2 - 4} = \frac{25}{4} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(2x^2 + 4x + \alpha + 8)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + \alpha + 8}{2+2} = \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha + 24}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \alpha + 24 = 25 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1} \quad (3)$$

$$\text{Τέλος } (1) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \boxed{\beta = -4}$$

6.16 4)

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \alpha x^4 + \beta x^5 - 5 = \alpha \cdot 1^4 + \beta \cdot 1^5 - 5 = \alpha + \beta - 5$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha x^4 + \beta x^5 - 5 = \alpha + \beta - 5$ ήταν διάφορο από το

μηδέν τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^4 + \beta x^5 - 5}{x - 1}$ δεν θα μπορούσε να κάνει 2 (θα έκανε είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, είτε δεν θα υπήρχε)

Αναγκαία λοιπόν θα πρέπει (αλλά δεν θα αρκεί)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \alpha x^4 + \beta x^5 - 5 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta - 5 = 0 \quad (1)$$

Εφόσον λοιπόν ισχύει η σχέση (1) το πολυώνυμο $\alpha x^4 + \beta x^5 - 5$ έχει ρίζα το 1 και άρα παράγοντα το $x - 1$. Θα το παραγοντοποιήσουμε με το σχήμα Horner

$$\begin{array}{r|rrrrrr} \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 & -5 \\ & \beta & \alpha + \beta & \alpha + \beta & \alpha + \beta & \alpha + \beta \\ \hline \beta & \alpha + \beta & \alpha + \beta & \alpha + \beta & \alpha + \beta & \alpha + \beta - 5 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ \\ \\ \\ (1) \end{array}$$

$$\text{Οπότε } \alpha x^4 + \beta x^5 - 5 = (x - 1) [\beta x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha + \beta] \quad (2)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^4 + \beta x^5 - 5}{x - 1} &= 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} [\beta x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha + \beta]}{\cancel{x-1}} = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta \cdot 1^4 + (\alpha + \beta) \cdot 1^3 + (\alpha + \beta) \cdot 1^2 + (\alpha + \beta) \cdot 1 + \alpha + \beta = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta + (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) + \alpha + \beta = 2 \Rightarrow 4\alpha + 5\beta = 2 \quad (3) \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\boxed{\alpha = 23}$ και $\boxed{\beta = -18}$

6.16 5)

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 4) = -1 < 0$ θα είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha(x + 2) + \beta(-x + 4) - 2}{x^2 - 5x + 6} &= 16 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha x + 2\alpha - \beta x + 4\beta - 2}{(x - 3)(x - 2)} = 16 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\alpha - \beta)x + 2\alpha + 4\beta - 2}{(x - 3)(x - 2)} = 16 \end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3} [(\alpha - \beta)x + 2\alpha + 4\beta - 2] = (\alpha - \beta) \cdot 3 + 2\alpha + 4\beta - 2 = 3\alpha - 3\beta + 2\alpha + 4\beta - 2 = 5\alpha + \beta - 2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)(x - 2) = (3 - 3)(3 - 2) = 0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} [(\alpha - \beta)x + 2\alpha + 4\beta - 2] = 5\alpha + \beta - 2$ ήταν

διάφορο από το μηδέν τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\alpha - \beta)x + 2\alpha + 4\beta - 2}{(x - 3)(x - 2)}$ δεν θα μπορούσε να

κάνει 16 (θα έκανε είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, είτε δεν θα υπήρχε)

Αναγκαία λοιπόν θα πρέπει (αλλά δεν θα αρκεί)

$$\lim_{x \rightarrow 3} [(\alpha - \beta)x + 2\alpha + 4\beta - 2] = 0 \Rightarrow 5\alpha + \beta - 2 = 0 \quad (1)$$

Εφόσον λοιπόν ισχύει η σχέση (1) το πολυώνυμο $(\alpha - \beta)x + 2\alpha + 4\beta - 2$ έχει ρίζα το 3 και άρα παράγοντα το $x-3$. Πράγματι

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)x + 2\alpha + 4\beta - 2 &\stackrel{(1) \Rightarrow \beta = 2 - 5\alpha}{\Rightarrow} (\alpha - 2 + 5\alpha)x + 2\alpha + 4(2 - 5\alpha) - 2 = \\ &= (6\alpha - 2)x + 2\alpha + 8 - 20\alpha - 2 = (6\alpha - 2)x - 18\alpha + 6 = \\ &= (6\alpha - 2)x - 3(6\alpha - 2) = (6\alpha - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } (\alpha - \beta)x + 2\alpha + 4\beta - 2 = (6\alpha - 2)(x - 3) \quad (2)$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\alpha - \beta)x + 2\alpha + 4\beta - 2}{(x - 3)(x - 2)} = 16 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(6\alpha - 2)(\cancel{x - 3})}{(\cancel{x - 3})(x - 2)} = 16 \Rightarrow \frac{6\alpha - 2}{3 - 2} = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha - 2 = 16 \Rightarrow 6\alpha = 18 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3} \quad (3)$$

$$\text{Τέλος } \stackrel{(3)}{(1)} \Rightarrow \boxed{\beta = -13}$$

6.16 6)

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 1) = 4 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 4) = -1 < 0$ θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha(x + 1) + \beta(-x + 4) - 1}{x^2 - 4x + 3} = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha x + \alpha - \beta x + 4\beta - 1}{(x - 3)(x - 1)} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\alpha - \beta)x + \alpha + 4\beta - 1}{(x - 3)(x - 1)} = 2$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3} [(\alpha - \beta)x + \alpha + 4\beta - 1] = (\alpha - \beta) \cdot 3 + \alpha + 4\beta - 1 = 3\alpha - 3\beta + \alpha + 4\beta - 1 = 4\alpha + \beta - 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)(x - 1) = (3 - 3)(3 - 1) = 0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} [(\alpha - \beta)x + \alpha + 4\beta - 1] = 4\alpha + \beta - 1$ ήταν

διάφορο από το μηδέν τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha(x + 1) + \beta(-x + 4) - 1}{x^2 - 4x + 3}$ δεν θα μπορούσε να κάνει 2 (θα έκανε είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, είτε δεν θα υπήρχε)

Αναγκαία λοιπόν θα πρέπει (αλλά δεν θα αρκεί)

$$\lim_{x \rightarrow 3} [(\alpha - \beta)x + \alpha + 4\beta - 1] = 0 \Rightarrow 4\alpha + \beta - 1 = 0 \quad (1)$$

Εφόσον λοιπόν ισχύει η σχέση (1) το πολυώνυμο $(\alpha - \beta)x + \alpha + 4\beta - 1$ έχει ρίζα το 3 και άρα παράγοντα το $x-3$. Πράγματι

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)x + \alpha + 4\beta - 1 &\stackrel{(1) \Rightarrow \beta = 1 - 4\alpha}{=} (\alpha - 1 + 4\alpha)x + \alpha + 4(1 - 4\alpha) - 1 = \\ &= (5\alpha - 1)x + \alpha + 4 - 16\alpha - 1 = (5\alpha - 1)x + 3 - 15\alpha = (5\alpha - 1)x - 3(5\alpha - 1) = \\ &= (5\alpha - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } (\alpha - \beta)x + \alpha + 4\beta - 1 = (5\alpha - 1)(x - 3) \quad (2)$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\alpha - \beta)x + \alpha + 4\beta - 1}{(x - 3)(x - 1)} = 2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(5\alpha - 1) \cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)}(x - 1)} = 2 \Rightarrow \frac{5\alpha - 1}{3 - 1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{5\alpha - 1}{2} = 2 \Rightarrow 5\alpha - 1 = 4 \Rightarrow 5\alpha = 5 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1} \quad (3)$$

$$\text{Τέλος } (1) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \boxed{\beta = -3}$$