Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

6.15 1)

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\lambda^2-\sqrt{x}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\left(\lambda^2-\sqrt{x}\right)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\left(\lambda^2-1\right)\cdot(+\infty)$$

Οπότε

- αν $\lambda^2-1>0\Rightarrow\lambda\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ τότε $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty}$
- αν $\lambda^2-1<0\Rightarrow\lambda\in(-1,1)$ τότε $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty}$
- αν $\lambda=\pm 1$ τότε

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(x-1)^2\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}^2}{(x-1)^2\left(1+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)^2\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=$$

Αν x>1: $-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}\cdot(+\infty)=-\infty$

Αν x<1: $-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}\cdot(-\infty)=+\infty$

Οπότε για $\lambda=\pm 1$ το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει

6.15 2)

Έστω $f(x)=\frac{2x-\lambda}{(x-2)^2}$. Τότε

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x-\lambda}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}(2x-\lambda)\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=(4-\lambda)\cdot(+\infty)$$

Οπότε

<u>αν $4-\lambda>0\Rightarrow\lambda<4$</u> τότε $\boxed{\lim_{x\to 2} f(x)=+\infty}$

<u>αν $4-\lambda<0$</u> $\Rightarrow\lambda>4$ τότε $\boxed{\lim_{x\to 2} f(x)=-\infty}$

Τέλος

<u>Αν $\lambda=4$</u> τότε $f(x)=\frac{2x-4}{(x-2)^2}$ και ακόμη

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}}}=\boxed{+\infty}\quad\text{και}\quad\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}}}=\boxed{-\infty}$$

Οπότε για $\lambda=4$ το $\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει

Συνοπτικά

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}+\infty\ ,\ \text{αν}\ \lambda<4\\ -\infty\ ,\ \text{αν}\ \lambda>4\\ \text{δεν υπάρχει αν}\ \lambda=4\end{cases}$$

6.15 3)

Έστω $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\lambda}{(x-4)^2}$. Τότε

$$\lim_{x\to4} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\lambda}{(x-4)^2}=\lim_{x\to4}\left(\sqrt{x}-\lambda\right)\cdot\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-4)^2}=\left(\sqrt{4}-\lambda\right)\cdot(+\infty)=(2-\lambda)\cdot(+\infty)$$

Οπότε

αν $2-\lambda>0\Rightarrow\lambda<2$ τότε $\boxed{\lim_{x\to4} f(x)=+\infty}$

αν $2-\lambda<0 \Rightarrow\lambda>2$ τότε $\boxed{\lim_{x\to4} f(x)=-\infty}$

Τέλος

Αν $\lambda=2$ τότε

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{(x-4)^2}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)^2\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}^2-2^2}{(x-4)^2\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\cancel{x-4}^{\,1}}{(x-4)^{\cancel{2}}\left(\sqrt{x}+2\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

Οπότε

$$\lim_{x\to4^+} f(x)=\lim_{x\to4^+}\frac{1}{\sqrt{x}+2}\lim_{x\to4^+}\frac{1}{x-4}=\frac{1}{4}\cdot(+\infty)=\boxed{+\infty}$$

και

$$\lim_{x\to4^-} f(x)=\lim_{x\to4^-}\frac{1}{\sqrt{x}+2}\lim_{x\to4^-}\frac{1}{x-4}=\frac{1}{4}\cdot(-\infty)=\boxed{-\infty}$$

Οπότε για $\lambda=2$ το $\lim_{x\to4} f(x)$ δεν υπάρχει

Συνοπτικά

$$\lim_{x\to4} f(x)=\begin{cases}+\infty \ , & \text{αν } \lambda<2\\ -\infty \ , & \text{αν } \lambda>2\\ \text{δεν υπάρχει} & \text{αν } \lambda=2\end{cases}$$

6.15 4)

$$f(x)=\frac{\lambda^2+12x}{(x+3)^2}$$

$$\lim_{x\to-3} f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{\lambda^2+12x}{(x+3)^2}=\lim_{x\to-3}\left(\lambda^2+12x\right)\cdot\lim_{x\to-3}\frac{1}{(x+3)^2}=\left(\lambda^2-36\right)\cdot(+\infty)$$

Οπότε

- αν $\lambda^2-36>0\Rightarrow\lambda\in(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$ τότε $\boxed{\lim_{x\to-3} f(x)=+\infty}$
- αν $\lambda^2-1<0\Rightarrow\lambda\in(-6,6)$ τότε $\boxed{\lim_{x\to-3} f(x)=-\infty}$
- αν $\lambda=\pm6$ τότε

$$\lim_{x\to-3} f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{36+12x}{(x+3)^2}=\lim_{x\to-3}\frac{12\,\cancel{(x+3)}}{(x+3)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to-3}12\frac{1}{x+3}=$$

$$= \begin{cases}\overset{\text{Αν } x>-3}{\nearrow}\ 12\cdot\lim_{x\to-3^+}\dfrac{1}{x+3}=12\cdot(+\infty)=+\infty\\ \underset{\text{Αν } x<-3}{\searrow}\ 12\cdot\lim_{x\to-3^-}\dfrac{1}{x+3}=12\cdot(-\infty)=-\infty\end{cases}$$

Οπότε για $\lambda = \pm 6$ το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει

6.15 5)

Έστω $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\alpha}{x^3-3x^2+3x-1} \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\alpha}{(x-1)^3}$. Τότε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-\alpha}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}-\alpha\right)\cdot \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^3} = (1-\alpha)\cdot \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^3}$$

Οπότε

αν $\alpha \neq 1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = (1-\alpha)\cdot \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^3} = (1-\alpha)(+\infty)$$

και

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = (1-\alpha)\cdot \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^3} = (1-\alpha)(-\infty)$$

Προφανώς $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ και άρα αν $\alpha \neq 1$ το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει

Τέλος αν $\alpha = 1$ τότε $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{(x-1)^3}$ οπότε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)^3\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}^2-1}{(x-1)^3\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}^{\,1}}{(x-1)^{\cancel{3}\,2}\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}\cdot(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

Συνοπτικά

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} +\infty \ , \ \text{αν } \ \alpha = 1 \\ \text{δεν υπάρχει αν } \ \alpha \neq 1 \end{cases}$$