

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} (x^v - vx + v - 1) = 1 - v + v - 1 = 0$

Άρα το πολυώνυμο $x^v - vx + v - 1$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x-1$. Θα το παραγοντοποιήσουμε με σχήμα Horner

$$\begin{array}{ccccccc|l} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -v & v-1 & 1 \\ & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -v+1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -v+1 & 0 & \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{v-1 \text{ άσσοι}}$

$$\text{Άρα } x^v - vx + v - 1 = (x-1)(x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x - v + 1) \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι και το πολυώνυμο $x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x - v + 1$ έχει ρίζα το 1 και άρα παράγοντα το $x-1$

Κάνουμε ξανά παραγοντοποίηση με σχήμα Horner

$$\begin{array}{ccccccc|l} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -v+1 & 1 \\ & 1 & 2 & \dots & 1 & v-2 & v-1 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & \dots & v-2 & v-1 & 0 & \end{array}$$

Οπότε

$$(1) \Rightarrow x^v - vx + v - 1 = (x-1)^2 [x^{v-2} + 2x^{v-3} + 3x^{v-4} \dots + (v-2)x + v-1] \quad (2)$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v - vx + v - 1}{(x-1)^2} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}^2 [x^{v-2} + 2x^{v-3} + 3x^{v-4} \dots + (v-2)x + v-1]}{\cancel{(x-1)}^2} =$$

$$= 1^{v-2} + 2 \cdot 1^{v-3} + 3 \cdot 1^{v-4} \dots + (v-2) \cdot 1 + v-1 = 1 + 2 + 3 + \dots + (v-2) + (v-1)$$

$$\begin{array}{l} \text{αριθμητική πρόοδος} \\ = \end{array} \boxed{\frac{v(v-1)}{2}}$$