

$$\left| xf(x) - \eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq xf(x) - \eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x} \leq x^2 \Rightarrow$$

$$-x^2 + \eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x} \leq xf(x) \leq x^2 + \eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x} \quad (1)$$

Οπότε για x λίγο μεγαλύτερο από μηδέν

$$(1) \xRightarrow{\text{διαιρούμε με } x > 0} -x^2 + \eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x} \leq xf(x) \leq x^2 + \eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cancel{x^2} + \frac{\eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x}}{x} \leq f(x) \leq \cancel{x^2} + \frac{\eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x}}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cancel{x^2} + \frac{\eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x}}{x} \leq f(x) \leq \cancel{x^2} + \frac{\eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x}}{x}$$

$$\Rightarrow -x + \frac{\eta\mu x}{x} \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x + \frac{\eta\mu x}{x} \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \quad (2)$$

Όμως

$$-1 \leq \eta\mu \frac{1}{x} \leq 1 \quad \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε με } \eta\mu x \\ \text{για } x \text{ λίγο μεγαλύτερο από μηδέν} \\ \text{είναι } \eta\mu x > 0 \end{array} = \quad \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (-\eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x) = 0 \\ \text{κριτήριο παρεμβολής} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} = 0$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{\eta\mu x}{x} \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0 + 1 \cdot 0 = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x + \frac{\eta\mu x}{x} \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0 + 1 \cdot 0 = 0 \quad (4)$$

Επομένως

$$(2) \xRightarrow{(3),(4)} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

Ομοίως για x λίγο μικρότερο από μηδέν αποδεικνύεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ και άρα

τελικά είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$