5.47

Θέτουμε

$$\frac{f(x)\eta\mu x\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu x-1}{\sqrt{1+x^2}-1}=h(x)$$

οπότε θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=3$

Ακόμη

$$\frac{f(x)\eta\mu x\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu x-1}{\sqrt{1+x^2}-1}=h(x)\Rightarrow f(x)\eta\mu x\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu x-1=h(x)\left[\sqrt{1+x^2}-1\right]\Rightarrow$$

$$f(x)\eta\mu x\eta\mu 2x=h(x)\left[\sqrt{1+x^2}-1\right]+1-\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow f(x)=\frac{h(x)\left[\sqrt{1+x^2}-1\right]+1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\eta\mu 2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)\left[\sqrt{1+x^2}-1\right]+1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\eta\mu 2x}$$

$$\overset{\substack{\text{διαιρούμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } x^2}}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{h(x)\left[\sqrt{1+x^2}-1\right]+1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}{\dfrac{\eta\mu x\eta\mu 2x}{x^2}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)\cdot\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{\eta\mu 2x}{x}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to 0}h(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}}\quad(1)$$

Αλλά

$$\lim_{x\to 0}h(x)=3\quad(2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{1+x^2}+1}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}^2-1^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}\quad(3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } 1+\sigma\upsilon\nu x}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\overset{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1}{=}1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\quad(4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } 2}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu 2x}{2x}\overset{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}=1}{=}2\cdot 1=2\quad(5)$$

Έτσι τελικά

$$(1) \overset{(2),(3),(4),(5)}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1\cdot 2} = \boxed{1}$$