

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^v + \beta x^\mu + \gamma) = \alpha \cdot 1^v + \beta \cdot 1^\mu + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 0$

Άρα το πολυώνυμο $\alpha x^v + \beta x^\mu + \gamma$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x-1$. Θα το παραγοντοποιήσουμε με σχήμα Horner

$$\begin{array}{cccccccccccc|c} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma & 1 \\ & \alpha & \alpha & & \alpha & \alpha & \beta + \alpha & \beta + \alpha & & \beta + \alpha & \beta + \alpha & \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha + \beta & \alpha + \beta & \alpha + \beta & \cdots & \alpha + \beta & \alpha + \beta + \gamma = 0 & \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{v-\mu \text{ όροι } \alpha} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mu \text{ όροι } \beta + \alpha}$

Άρα

$$\alpha x^v + \beta x^\mu + \gamma = (x-1) \left[\alpha x^{v-1} + \alpha x^{v-2} + \cdots + (\alpha + \beta) x^{\mu-1} + (\alpha + \beta) x^{\mu-2} + (\alpha + \beta) x + \alpha + \beta \right] \quad (1)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^v + \beta x^\mu + \gamma}{x-1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \left[\alpha x^{v-1} + \alpha x^{v-2} + \cdots + (\alpha + \beta) x^{\mu-1} + (\alpha + \beta) x^{\mu-2} + (\alpha + \beta) x + \alpha + \beta \right]}{\cancel{x-1}} = \\ &= \alpha \cdot 1^{v-1} + \alpha \cdot 1^{v-2} + \cdots + (\alpha + \beta) \cdot 1^{\mu-1} + (\alpha + \beta) \cdot 1^{\mu-2} + (\alpha + \beta) \cdot 1 + \alpha + \beta = \\ &= \alpha + \alpha + \cdots + (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) + \alpha + \beta = \boxed{v\alpha + \mu\beta} \end{aligned}$$