5.33 1)

Θέτουμε $h(x)=5f(x)+2g(x)$ (1) και $\varphi(x)=7f(x)+3g(x)$ (2)

Προφανώς είναι $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to\alpha}\varphi(x)=1$

Λύνουμε (σαν σύστημα) τις (1) και (2)

$$\begin{matrix}-3\\2\end{matrix}\begin{cases}5f(x)+2g(x)=h(x)\\7f(x)+3g(x)=\varphi(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-15f(x)-6g(x)=-3h(x)\\14f(x)+6g(x)=2\varphi(x)\end{cases}\overset{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -f(x)=-3h(x)+2\varphi(x)\Rightarrow \boxed{f(x)=3h(x)-2\varphi(x)}\quad (3)$$

Ακόμη

$$h(x)=5f(x)+2g(x)\overset{(3)}{\Rightarrow}h(x)=5\left[3h(x)-2\varphi(x)\right]+2g(x)\Rightarrow$$

$$h(x)=15h(x)-10\varphi(x)+2g(x)\Rightarrow 2g(x)=-14h(x)+10\varphi(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{g(x)=-7h(x)+5\varphi(x)}\quad (4)$$

Οπότε

$$\lim_{x\to\alpha}f(x)\overset{(3)}{=}\lim_{x\to\alpha}\left[3h(x)-2\varphi(x)\right]\overset{\lim\limits_{x\to\alpha}h(x)=2,\ \lim\limits_{x\to\alpha}\varphi(x)=1}{=}3\cdot2-2\cdot1=6-2=\boxed{4}$$

$$\lim_{x\to\alpha}g(x)\overset{(4)}{=}\lim_{x\to\alpha}\left[-7h(x)+5\varphi(x)\right]\overset{\lim\limits_{x\to\alpha}h(x)=2,\ \lim\limits_{x\to\alpha}\varphi(x)=1}{=}-7\cdot2+5\cdot1=-14+5=\boxed{-9}$$

5.33 2)

Θέτουμε $h(x)=3f(x)-g(x)$ (1) και $\varphi(x)=f(x)+5g(x)$ (2)

Προφανώς είναι $\lim\limits_{x\to3} h(x)=-5$ και $\lim\limits_{x\to3}\varphi(x)=9$

Λύνουμε (σαν σύστημα) τις (1) και (2)

$$5\begin{cases}3f(x)-g(x)=h(x)\\f(x)+5g(x)=\varphi(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}15f(x)-5g(x)=5h(x)\\f(x)+5g(x)=\varphi(x)\end{cases}\overset{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 16f(x)=5h(x)+\varphi(x)\Rightarrow\boxed{f(x)=\frac{5h(x)+\varphi(x)}{16}}\quad (3)$$

Ακόμη

$$h(x)=3f(x)-g(x)\overset{(3)}{\Rightarrow}h(x)=3\frac{5h(x)+\varphi(x)}{16}-g(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot h(x)=3\cdot\cancel{16}\cdot\frac{5h(x)+\varphi(x)}{\cancel{16}}-16\cdot g(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot h(x)=15h(x)+3\varphi(x)-16\cdot g(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot g(x)=-h(x)+3\varphi(x)\Rightarrow\boxed{g(x)=\frac{-h(x)+3\varphi(x)}{16}}\quad (4)$$

Οπότε

$$\lim_{x\to3}f(x)\overset{(3)}{=}\lim_{x\to3}\frac{5h(x)+\varphi(x)}{16}\overset{\lim\limits_{x\to3}h(x)=-5,\ \lim\limits_{x\to3}\varphi(x)=9}{=}\frac{5(-5)+9}{16}=\boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to3} g(x) \overset{(4)}{=} \lim_{x\to3}\frac{-h(x)+3\varphi(x)}{16} \overset{\lim_{x\to3}h(x)=-5,\ \lim_{x\to3}\varphi(x)=9}{=} \frac{-(-5)+3\cdot9}{16} = \boxed{2}$$

5.33 3)

Θέτουμε $h(x)=f(x)+3g(x)+x$ (1) και $\varphi(x)=2f(x)+g(x)-2x+1$ (2)

Προφανώς είναι $\lim_{x\to1} h(x)=-2$ και $\lim_{x\to1}\varphi(x)=3$

Λύνουμε (σαν σύστημα) τις (1) και (2)

$$-2\cdot\begin{cases} f(x)+3g(x)+x=h(x) \\ 2f(x)+g(x)-2x+1=\varphi(x)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f(x)-6g(x)-2x=-2h(x) \\ 2f(x)+g(x)-2x+1=\varphi(x)\end{cases} \overset{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -5g(x)-4x+1=-2h(x)+\varphi(x) \Rightarrow \boxed{g(x)=\frac{2h(x)-\varphi(x)-4x+1}{5}} \quad (3)$$

Ακόμη

$$h(x)=f(x)+3g(x)+x \overset{(3)}{\Rightarrow} h(x)=f(x)+3\frac{2h(x)-\varphi(x)-4x+1}{5}+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot h(x)=5\cdot f(x)+3\cdot \cancel{5}\cdot\frac{2h(x)-\varphi(x)-4x+1}{\cancel{5}}+5\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5h(x)=5f(x)+6h(x)-3\varphi(x)-12x+3+5x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5f(x)=-h(x)+3\varphi(x)+7x-3 \Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{-h(x)+3\varphi(x)+7x-3}{5}} \quad (4)$$

Οπότε

$$\lim_{x\to1} f(x) \overset{(4)}{=} \lim_{x\to1}\frac{-h(x)+3\varphi(x)+7x-3}{5} \overset{\lim_{x\to1}h(x)=-2,\ \lim_{x\to1}\varphi(x)=3}{=} \frac{-(-2)+3\cdot3+7\cdot1-3}{5} = \boxed{3}$$

$$\lim_{x\to1} g(x) \overset{(3)}{=} \lim_{x\to1}\frac{2h(x)-\varphi(x)-4x+1}{5} \overset{\lim_{x\to1}h(x)=-2,\ \lim_{x\to1}\varphi(x)=3}{=} \frac{2(-2)-3-4\cdot1+1}{5} = \boxed{-2}$$