## 5.30 1)

Θέτουμε $h(x)=\frac{2f(x)+10}{x-2}$ οπότε $\lim_{x\to 2}h(x)=4$ (1) και ακόμη

$$h(x)=\frac{2f(x)+10}{x-2}\Rightarrow h(x)(x-2)=2f(x)+10\Rightarrow f(x)=\frac{h(x)(x-2)-10}{2}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to 2}f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)(x-2)-10}{2}=\frac{\lim_{x\to 2}h(x)\cdot\lim_{x\to 2}(x-2)-10}{2}\overset{(1)}{=}\frac{4\cdot 0-10}{2}=\boxed{-5}$$

## 5.30 2)

Θέτουμε $h(x)=2f(x)+3x^2-2x+1$ οπότε $\lim_{x\to 2}h(x)=8$ (1) και ακόμη

$$h(x)=2f(x)+3x^2-2x+1\Rightarrow h(x)-3x^2+2x-1=2f(x)\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{h(x)-3x^2+2x-1}{2}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to -1}f(x)}=\lim_{x\to -1}\frac{h(x)-3x^2+2x-1}{2}=$$

$$=\frac{\lim_{x\to -1}h(x)-\lim_{x\to -1}3x^2+\lim_{x\to -1}2x-\lim_{x\to -1}1}{2}\overset{(1)}{=}\frac{8-3-2-1}{2}=\boxed{1}$$

## 5.30 3)

Θέτουμε $h(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x}$ οπότε $\lim_{x\to 0}h(x)=\alpha$ (1) και ακόμη

$$h(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x}\Rightarrow f(x)=h(x)\eta\mu x$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to 0}f(x)}=\lim_{x\to 0}h(x)\eta\mu x=\lim_{x\to 0}h(x)\cdot\lim_{x\to 0}\eta\mu x\overset{(1)}{=}\alpha\cdot 0=\boxed{0}$$

## 5.30 4)

Θέτουμε $h(x)=\frac{3f(x)-6}{x-3}$ οπότε $\lim_{x\to 3}h(x)=1$ (1) και ακόμη

$$h(x)=\frac{3f(x)-6}{x-3}\Rightarrow h(x)(x-3)=3f(x)-6\Rightarrow f(x)=\frac{h(x)(x-3)+6}{3}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to 3}f(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{h(x)(x-3)+6}{3}=\frac{\lim_{x\to 3}h(x)\cdot\lim_{x\to 3}(x-3)+6}{3}\overset{(1)}{=}\frac{1\cdot 0+6}{3}=\boxed{2}$$

## 5.30 5)

Θέτουμε $h(x)=\frac{2f(x)+8}{x+1}$ οπότε $\lim_{x\to -1}h(x)=-2$ (1) και ακόμη

$$h(x)=\frac{2f(x)+8}{x+1}\Rightarrow h(x)(x+1)=2f(x)+8\Rightarrow f(x)=\frac{h(x)(x+1)-8}{2}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to -1} f(x)} = \lim_{x\to -1}\frac{h(x)(x+1)-8}{2} = \frac{\lim_{x\to -1} h(x)\cdot \lim_{x\to -1}(x+1)-8}{2} \overset{(1)}{=} \frac{(-2)\cdot 0-8}{2} = \boxed{-4}$$

## 5.30 6)

Θέτουμε $h(x)=\dfrac{2f(x)+6}{\sqrt{x+1}-2}$ οπότε $\lim_{x\to 3} h(x)=7$ (1) και ακόμη

$$h(x)=\frac{2f(x)+6}{\sqrt{x+1}-2} \Rightarrow h(x)\left(\sqrt{x+1}-2\right)=2f(x)+6 \Rightarrow f(x)=\frac{h(x)\left(\sqrt{x+1}-2\right)-6}{2}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to 3} f(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{h(x)\left(\sqrt{x+1}-2\right)-6}{2} = \frac{\lim_{x\to 3} h(x)\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}-2\right)-6}{2} \overset{(1)}{=} \frac{7\cdot 0-6}{2} = \boxed{-3}$$

## 5.30 7)

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)+x+1}{x^2-1}=-7$$

Θέτουμε $h(x)=\dfrac{2f(x)+x+1}{x^2-1}$ οπότε $\lim_{x\to 1} h(x)=-4$ (1) και ακόμη

$$h(x)=\frac{2f(x)+x+1}{x^2-1} \Rightarrow h(x)\left(x^2-1\right)=2f(x)+x+1 \Rightarrow f(x)=\frac{h(x)\left(x^2-1\right)-x-1}{2}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)} = \frac{h(x)\left(x^2-1\right)-x-1}{2} = \frac{\lim_{x\to 1} h(x)\lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)-\lim_{x\to 1} x-1}{2} \overset{(1)}{=} \frac{-4\cdot 0-1-1}{2} = \boxed{-1}$$

## 5.30 8)

Θέτουμε $h(x)=\dfrac{x^2+xf(x)-3}{2x+f(x)}$ οπότε $\lim_{x\to -4} h(x)=-3$ (1) και ακόμη

$$h(x)=\frac{x^2+xf(x)-3}{2x+f(x)} \Rightarrow h(x)\left[2x+f(x)\right]=x^2+xf(x)-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2xh(x)+h(x)\cdot f(x)=x^2+xf(x)-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)\cdot f(x)-xf(x)=x^2-3-2xh(x) \Rightarrow f(x)\left[h(x)-x\right]=x^2-3-2xh(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2-3-2xh(x)}{h(x)-x}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to -4} f(x)} = \lim_{x\to -4}\frac{x^2-3-2xh(x)}{h(x)-x} = \frac{\lim_{x\to -4}\left(x^2-3\right)-2\lim_{x\to -4} x\cdot \lim_{x\to -4} h(x)}{\lim_{x\to -4} h(x)-\lim_{x\to -4} x} \overset{\substack{\lim_{x\to -4} h(x)=-3 \\ \lim_{x\to -4} x=-4}}{=}$$

$$= \frac{16-3-2\cdot(-4)\cdot(-3)}{-3-(-4)} = \boxed{-11}$$

## 5.30 9)

Θέτουμε $h(x)=\frac{2x+3}{4f(x)+1}$ οπότε $\lim_{x\to 3}h(x)=-3$ (1) και ακόμη

$$h(x)=\frac{2x+3}{4f(x)+1}\Rightarrow h(x)\left[4f(x)+1\right]=2x+3\Rightarrow 4f(x)+1=\frac{2x+3}{h(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4f(x)=\frac{2x+3}{h(x)}-1\Rightarrow f(x)=\frac{2x+3}{4h(x)}-\frac{1}{4}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to 3}f(x)}=\lim_{x\to 3}\left[\frac{2x+3}{4h(x)}-\frac{1}{4}\right]=\frac{\lim_{x\to 3}(2x+3)}{\lim_{x\to 3}\left[4h(x)\right]}-\lim_{x\to 3}\frac{1}{4}\overset{(1)}{=}\frac{2\cdot 3+3}{4\cdot(-3)}-\frac{1}{4}=-\frac{9}{12}-\frac{1}{4}=\boxed{-1}$$