

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 -1 \leq \sigmaυν \frac{2x}{x-2} \leq 1 &\Rightarrow \left| \sigmaυν \frac{2x}{x-2} \right| \leq 1 \Rightarrow \overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε} \\ \text{με } |x^2-4| \geq 0}}{\Rightarrow} |x^2-4| \left| \sigmaυν \frac{2x}{x-2} \right| \leq |x^2-4| \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left| (x^2-4) \sigmaυν \frac{2x}{x-2} \right| \leq |x^2-4| \Rightarrow -|x^2-4| \leq (x^2-4) \sigmaυν \frac{2x}{x-2} \leq |x^2-4| \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 2} (-|x^2-4|) = \lim_{x \rightarrow 2} |x^2-4| = 0 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1), (2) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2-4) \sigmaυν \frac{2x}{x-2} = \boxed{0}$$

2ος τρόπος

Για $x > 2$ έχουμε

$$-1 \leq \sigmaυν \frac{2x}{x-2} \leq 1 \xRightarrow{x > 2 \Rightarrow x^2-4 > 0} -(x^2-4) \leq (x^2-4) \sigmaυν \frac{2x}{x-2} \leq x^2-4 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 2^+} [-(x^2-4)] = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-4) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1), (2) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-4) \sigmaυν \frac{2x}{x-2} = 0} \quad (3)$$

Ομοίως για $x < 2$ έχουμε

$$-1 \leq \sigmaυν \frac{2x}{x-2} \leq 1 \xRightarrow{x < 2 \Rightarrow x^2-4 < 0} -(x^2-4) \geq (x^2-4) \sigmaυν \frac{2x}{x-2} \geq x^2-4 \quad (4)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 2^-} [-(x^2-4)] = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2-4) = 0 \quad (5)$$

$$\text{Οπότε } (4), (5) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2-4) \sigmaυν \frac{2x}{x-2} = 0} \quad (6)$$

$$\text{Τελικά } (3), (6) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-4) \sigmaυν \frac{2x}{x-2} = 0}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 -1 \leq \etaμ \frac{2}{x+3} \leq 1 &\Rightarrow \left| \etaμ \frac{2}{x+3} \right| \leq 1 \Rightarrow \overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε} \\ \text{με } |x^2-9| \geq 0}}{\Rightarrow} |x^2-9| \left| \etaμ \frac{2}{x+3} \right| \leq |x^2-9| \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left| (x^2-9) \etaμ \frac{2}{x+3} \right| \leq |x^2-9| \Rightarrow -|x^2-9| \leq (x^2-9) \etaμ \frac{2}{x+3} \leq |x^2-9| \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -3} (-|x^2-9|) = \lim_{x \rightarrow -3} |x^2-9| = 0 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1), (2) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \lim_{x \rightarrow -3} (x^2-9) \etaμ \frac{2}{x+3} = \boxed{0}$$

2ος τρόπος

Για $x > -3$ έχουμε

$$-1 \leq \etaμ \frac{2}{x+3} \leq 1 \xRightarrow{x > -3 \Rightarrow x^2-9 < 0} -(x^2-9) \geq (x^2-9) \etaμ \frac{2}{x+3} \geq x^2-9 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[-(x^2 - 9) \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 9) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1), (2) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \boxed{\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 9) \eta \mu \frac{2}{x+3}} \quad (3)$$

Ομοίως για $x < -3$ έχουμε

$$-1 \leq \eta \mu \frac{2}{x+3} \leq 1 \xRightarrow{x < -3 \Rightarrow x^2 - 9 > 0} -(x^2 - 9) \leq (x^2 - 4) \eta \mu \frac{2}{x+3} \leq x^2 - 9 \quad (4)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -3^-} \left[-(x^2 - 9) \right] = \lim_{x \rightarrow -3^-} (x^2 - 9) = 0 \quad (5)$$

$$\text{Οπότε } (4), (5) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \boxed{\lim_{x \rightarrow -3^-} (x^2 - 9) \eta \mu \frac{2}{x+3} = 0} \quad (6)$$

$$\text{Τελικά } (3), (6) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 9) \eta \mu \frac{2}{x+3} = 0}$$

5.29 3)

Για $x > -1$ έχουμε

$$-1 \leq \sigma \nu \nu \frac{2x}{x+1} \leq 1 \xRightarrow{x > -1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) > 0}$$

$$-(x^2 + 3x + 2) \leq (x^2 + 3x + 2) \sigma \nu \nu \frac{2x}{x+1} \leq x^2 + 3x + 2 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[-(x^2 + 3x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 3x + 2) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1), (2) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \boxed{\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 3x + 2) \sigma \nu \nu \frac{2x}{x+1} = 0} \quad (3)$$

Ομοίως για $x < -1$ έχουμε

$$-1 \leq \sigma \nu \nu \frac{2x}{x+1} \leq 1 \xRightarrow{x < -1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) < 0}$$

$$-(x^2 + 3x + 2) \geq (x^2 + 3x + 2) \sigma \nu \nu \frac{2x}{x+1} \geq x^2 + 3x + 2 \quad (4)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[-(x^2 + 3x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 3x + 2) = 0 \quad (5)$$

$$\text{Οπότε } (4), (5) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \boxed{\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 3x + 2) \sigma \nu \nu \frac{2x}{x+1} = 0} \quad (6)$$

$$\text{Τελικά } (3), (6) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 2) \sigma \nu \nu \frac{2x}{x+1} = 0}$$

5.29 4)

Για $x > 5$ έχουμε

$$-1 \leq \sigma \nu \nu \frac{2x-1}{x^2-25} \leq 1 \xRightarrow{x > 5 \Rightarrow x^3 - 125 > 0}$$

$$-(x^3 - 125) \leq (x^3 - 125) \sigma \nu \nu \frac{2x-1}{x^2-25} \leq x^3 - 125 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 5^+} \left[-(x^3 - 125) \right] = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x^3 - 125) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1), (2) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \boxed{\lim_{x \rightarrow 5^+} (x^3 - 125) \sigma \nu \nu \frac{2x-1}{x^2-25} = 0} \quad (3)$$

Ομοίως για $x < 5$ έχουμε

$$-1 \leq \text{συν} \frac{2x-1}{x^2-25} \leq 1 \quad \begin{matrix} x < 5 \Rightarrow x^3 - 125 < 0 \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$-(x^3 - 125) \geq (x^3 - 125) \text{συν} \frac{2x-1}{x^2-25} \geq x^3 - 125 \quad (4)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 5^-} [-(x^3 - 125)] = \lim_{x \rightarrow 5^-} (x^3 - 125) = 0 \quad (5)$$

$$\text{Οπότε } (4), (5) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \boxed{\lim_{x \rightarrow 5} (x^3 - 125) \text{συν} \frac{2x-1}{x^2-25} = 0} \quad (6)$$

$$\text{Τελικά } (3), (6) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 5} (x^3 - 125) \text{συν} \frac{2x-1}{x^2-25} = 0}$$

5.29 5)

$$\text{Καταρχήν } \frac{x^2 - 8x + 16}{2x - 8} = \frac{(x-4)^2}{2(x-4)} = \frac{x-4}{2}$$

$$\text{οπότε } \boxed{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{2x - 8} \text{συν} \frac{x-2}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{2} \text{συν} \frac{x-2}{x^2 - 16}} \quad (1)$$

Έτσι

Για $x > 4$ έχουμε

$$-1 \leq \text{συν} \frac{x-2}{x^2-16} \leq 1 \quad \begin{matrix} x > 5 \Rightarrow x^3 - 125 > 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad -\frac{x-4}{2} \leq \frac{x-4}{2} \text{συν} \frac{x-2}{x^2-16} \leq \frac{x-4}{2} \quad (2)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(-\frac{x-4}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{2} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Οπότε } (1), (2), (3) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \boxed{\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 8x + 16}{2x - 8} \text{συν} \frac{x-2}{x^2 - 16} = 0} \quad (4)$$

Ομοίως για $x < 4$ έχουμε

$$-1 \leq \text{συν} \frac{x-2}{x^2-16} \leq 1 \quad \begin{matrix} x < 5 \Rightarrow x^3 - 125 < 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad -\frac{x-4}{2} \geq \frac{x-4}{2} \text{συν} \frac{x-2}{x^2-16} \geq \frac{x-4}{2} \quad (5)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 4^-} -\frac{x-4}{2} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{x-4}{2} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\text{Οπότε } (1), (5), (6) \xRightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}} \boxed{\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 8x + 16}{2x - 8} \text{συν} \frac{x-2}{x^2 - 16} = 0} \quad (7)$$

$$\text{Τελικά } (4), (7) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{2x - 8} \text{συν} \frac{x-2}{x^2 - 16} = 0}$$

5.29 6)

Αποδεικνύουμε παρόμοια με τα προηγούμενα ερωτήματα ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \eta \mu \frac{3}{x} \right) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(4x^2 \text{συν} \frac{x-2}{2x} \right) = 0$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \eta \mu \frac{3}{x} - 4x^2 \text{συν} \frac{x-2}{2x} \right) = 0 - 0 = 0$$

5.29 7)

Αποδεικνύουμε παρόμοια με τα προηγούμενα ερωτήματα ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - x - 1) \sigmaυν \frac{x+2}{x-1} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \etaμ \frac{2}{x^2-1} = 0$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[(2x^2 - x - 1) \sigmaυν \frac{x+2}{x-1} + (x-1) \etaμ \frac{2}{x^2-1} \right] = 0 - 0 = 0$$

5.29 8)

Αποδεικνύουμε παρόμοια με τα προηγούμενα ερωτήματα ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{4x - 8} \etaμ \frac{x}{x^2 - 4} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 4) \sigmaυν \frac{3x}{x-2} = 0$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 4x + 4}{4x - 8} \etaμ \frac{x}{x^2 - 4} + (2x - 4) \sigmaυν \frac{3x}{x-2} \right] = 0 - 0 = 0$$

5.29 9)

Αποδεικνύουμε παρόμοια με τα προηγούμενα ερωτήματα ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \etaμ \frac{1}{x} \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 \sigmaυν \frac{1}{x} \right) = 0$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \etaμ \frac{1}{x} - x^3 \sigmaυν \frac{1}{x} \right) = 0 - 0 = 0$$