5.27 1)

α) $$\lim_{x\to -2}\frac{\etaμ(x+2)}{2x+4}=\lim_{x\to -2}\frac{\etaμ(x+2)}{2(x+2)}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x+2\\ \text{όταν } x\to -2,\ y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy}{2y}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy}{y}\overset{\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{x}=1}{=}\frac{1}{2}\cdot 1=\boxed{\frac{1}{2}}$$

β) $$\lim_{x\to 4}\frac{εφ\left(\sqrt{x}-2\right)}{x-4}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\sqrt{x}-2\\ \text{οπότε } \sqrt{x}=y+2\Rightarrow x=(y+2)^2\\ \text{όταν } x\to 4,\ y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{εφy}{(y+2)^2-4}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\etaμy}{συνy}}{y^2+4y+\cancel{4}-\cancel{4}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy}{y(y+4)συνy}=\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{(y+4)συνy}\overset{\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{x}=1}{=}1\cdot\frac{1}{(0+4)\cdot 1}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

5.27 2)

$$\lim_{x\to 3}\frac{\etaμ(x-3)}{x-3}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-3\\ \text{όταν } x\to 3,\ y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy}{y}=\boxed{1}$$

5.27 3)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{\etaμ(x+1)}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x+1\\ \text{οπότε } x=y-1\\ \text{όταν } x\to -1,\ y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{(y-1)^2-(y-1)-2}{\etaμy}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2-2y+\cancel{1}-y+\cancel{1}-\cancel{2}}{\etaμy}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y^2-3y}{\etaμy}=\lim_{y\to 0}\frac{y(y-3)}{\etaμy}=\lim_{y\to 0}(y-3)\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\etaμy}\overset{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\etaμx}=1}{=}(0-3)\cdot 1=\boxed{-3}$$

5.27 4)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{εφ(x+2)}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x+2\\ \text{οπότε } x=y-2\\ \text{όταν } x\to -2,\ y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{(y-2)^2-4}{εφy}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2-4y+\cancel{4}-\cancel{4}}{\frac{\etaμy}{συνy}}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2-4y}{\frac{\etaμy}{συνy}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y(y-4)συνy}{\etaμy}=\lim_{y\to 0}\left[(y-4)συνy\right]\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\etaμy}\overset{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\etaμx}=1}{=}(0-4)\cdot 1\cdot 1=\boxed{-4}$$

5.27 5)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\etaμ(x-2)}{\sqrt{x+2}-2}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-2\\ \text{οπότε } x=y+2\\ \text{όταν } x\to 2,\ y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy}{\sqrt{y+2+2}-2}=\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy}{\sqrt{y+4}-2}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{y+4}+2}}{=}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy\left(\sqrt{y+4}+2\right)}{\left(\sqrt{y+4}-2\right)\left(\sqrt{y+4}+2\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy\left(\sqrt{y+4}+2\right)}{\sqrt{y+4}^2-2^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy\left(\sqrt{y+4}+2\right)}{y+\cancel{4}-\cancel{4}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\left(\sqrt{y+4}+2\right)\overset{\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{x}=1}{=}\sqrt{0+4}+2=\boxed{4}$$

5.27 6)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\etaμ(x-1)}{\sqrt{x}-1}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-1\\ \text{οπότε } x=y+1\\ \text{όταν } x\to 1,\ y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy}{\sqrt{y+1}-1}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{x+1}+1}}{=}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu y\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{y+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu y\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\sqrt{y+1}^2-1^2}=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu y\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{y+\cancel{1}-\cancel{1}}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu y\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu y}{y}\cdot\lim_{y\to0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)\overset{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}=1}{=}1\cdot\left(\sqrt{0+1}+1\right)=\boxed{2}$$

5.27 7)

$$\lim_{x\to3}\frac{\eta\mu(2x-6)}{\eta\mu(x-3)}=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu\left[2(x-3)\right]}{\eta\mu(x-3)}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-3\\ \text{όταν } x\to3,\ y\to0}}{=}\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu2y}{\eta\mu y}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } 2y}}{=}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu2y}{\eta\mu y}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } 2y\cdot y}}{=}\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu2y}{2y}\cdot\frac{2\cancel{y}}{\cancel{y}}\cdot\frac{y}{\eta\mu y}\overset{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu2x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\eta\mu x}=1}{=}1\cdot2\cdot1=\boxed{2}$$

5.27 8)

$$\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu\left(x^2-1\right)}{\eta\mu(x-1)}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } (x^2-1)\cdot(x-1)}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{\eta\mu(x-1)}\quad(1)$$

Όμως

$$\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x^2-1\\ \text{όταν } x\to1,\ y\to0\\ =}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu y}{y}=1\quad(2)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=1+1=2\quad(3)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-1\\ \text{όταν } x\to1,\ y\to0\\ =}}{=}\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu y}{y}=1\quad(4)$$

Επομένως

$$(1)\overset{(2),(3),(4)}{\Rightarrow}\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu\left(x^2-1\right)}{\eta\mu(x-1)}=1\cdot2\cdot1=\boxed{2}$$

5.27 9)

$$\lim_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\eta\mu x\\ \text{όταν } x\to0,\ y\to0}}{=}\lim_{y\to0}\frac{\varepsilon\varphi y}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{\eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu y}}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu y}{y\sigma\upsilon\nu y}=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu y}{y}\lim_{y\to0}\sigma\upsilon\nu y$$

$$\overset{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}=1}{=}1\cdot1=\boxed{1}$$

5.27 10)

$$\lim_{x\to2}\frac{\eta\mu(\pi x)}{x-2}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-2\Rightarrow x=y+2\\ \text{όταν } x\to2,\ y\to0}}{=}\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu\left[\pi(y+2)\right]}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu(\pi y+2\pi)}{y}=$$

$$\overset{\eta\mu(2\pi+\pi y)=\eta\mu(\pi y)}{=}\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu(\pi y)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\pi\eta\mu(\pi y)}{\pi y}\overset{\lim\limits_{y\to0}\frac{\eta\mu(\pi y)}{\pi y}=1}{=}\pi\cdot1=\boxed{\pi}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4\text{συν}x}{\pi-2x} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\pi-2x\Rightarrow 2x=\pi-y\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\\ \text{όταν } x\to\frac{\pi}{2}\text{ , } y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{4\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y} \overset{\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)=\text{ημ}\frac{y}{2}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{4\text{ημ}\frac{y}{2}}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\,\text{ημ}\frac{y}{2}}{\cancel{2}\frac{y}{2}}=2\lim_{y\to 0}\frac{\text{ημ}\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \overset{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\text{ημ}\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}=1}{=} 2\cdot 1=\boxed{2}$$