5.24 1)

α) $$\lim_{x\to 2}\frac{f(3x-6)}{x-2} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=3x-6\\ \text{οπότε } y=3(x-2)\Rightarrow x-2=\frac{y}{3}\\ \text{όταν } x\to 2,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{\frac{y}{3}} = \lim_{y\to 0}\frac{3f(y)}{y} = 3\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} = 3\cdot 5 = \boxed{15}$$

β) $$\lim_{x\to 4}\frac{f(x-4)}{\sqrt{x}-2} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-4\\ \text{οπότε } x=y+4\\ \text{όταν } x\to 4,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{\sqrt{y+4}-2} = \lim_{y\to 0}\frac{f(y)\left(\sqrt{y+4}+2\right)}{\left(\sqrt{y+4}-2\right)\left(\sqrt{y+4}+2\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{f(y)\left(\sqrt{y+4}+2\right)}{\left(\sqrt{y+4}-2\right)\left(\sqrt{y+4}+2\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{f(y)\left(\sqrt{y+4}+2\right)}{\sqrt{y+4}^2-2^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{f(y)\left(\sqrt{y+4}+2\right)}{y+\cancel{4}-\cancel{4}} = \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}\lim_{y\to 0}\left(\sqrt{y+4}+2\right) = 5\cdot\left(\sqrt{0+4}+2\right) = \boxed{20}$$

5.24 2)

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-2\\ \text{όταν } x\to 2,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5}{=} \boxed{5}$$

5.24 3)

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)}{2x-6} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-3\\ \text{οπότε } x=y+3\\ \text{όταν } x\to 3,\, y\to 0}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{f(y)}{2(y+3)-6} = \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{2y} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5}{=} \frac{1}{2}5 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

5.24 4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(8x)}{4x} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=8x\\ \text{οπότε } 4x=\frac{y}{2}\\ \text{όταν } x\to 0,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{\frac{y}{2}} = 2\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5}{=} 2\cdot 5 = \boxed{10}$$

5.24 5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^2+x\right)}{x^2+x} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x^2+x\\ \text{όταν } x\to 0,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5}{=} \boxed{5}$$

5.24 6)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{\sqrt{x+4}-2} \overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{x+4}+2}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f(3x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(3x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\sqrt{x+4}^2-2^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(3x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x+4-4} = \lim_{x\to 0}\frac{f(3x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}+2\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}+2\right) = \sqrt{0+4}+2 = 4$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=3x \\ \text{οπότε } x=\frac{y}{3} \\ \text{όταν } x\to 0,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{\frac{y}{3}} = 3\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5}{=} 3\cdot 5 = 15$$

Οπότε $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}+2\right)=4$ (1) και $\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}=15$ (2)

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}+2\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x} \overset{(1),(2)}{=} 4\cdot 15 = \boxed{60}$$

5.24 7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)+f(3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=2x \\ \text{οπότε } x=\frac{y}{2} \\ \text{όταν } x\to 0,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{\frac{y}{2}} = 2\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5}{=} 2\cdot 5 = 10$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=3x \\ \text{οπότε } x=\frac{y}{3} \\ \text{όταν } x\to 0,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{\frac{y}{3}} = 3\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5}{=} 3\cdot 5 = 15$$

Οπότε $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=10$ (1) και $\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}=15$ (2)

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)+f(3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x} \overset{(1),(2)}{=} 10+15 = \boxed{25}$$

5.24 8)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(4x)+f(6x)}{f(7x)-f(2x)} \overset{\substack{\text{διαιρούμε αριθμητή} \\ \text{και παρονομαστή με } x}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(4x)+f(6x)}{x}}{\frac{f(7x)-f(2x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(4x)+f(6x)}{x}}{\frac{f(7x)-f(2x)}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(4x)}{x}+\frac{f(6x)}{x}}{\frac{f(7x)}{x}-\frac{f(2x)}{x}}$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(4x)}{x} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=4x \\ \text{οπότε } x=\frac{y}{4} \\ \text{όταν } x\to 0,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{\frac{y}{4}} = 4\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5}{=} 4\cdot 5 = 20$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(6x)}{x} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=6x \\ \text{οπότε } x=\frac{y}{6} \\ \text{όταν } x\to 0,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{\frac{y}{6}} = 6\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5}{=} 6\cdot 5 = 30$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(7x)}{x} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=7x \\ \text{οπότε } x=\frac{y}{7} \\ \text{όταν } x\to 0,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{\frac{y}{7}} = 7\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5}{=} 7\cdot 5 = 35$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=2x \\ \text{οπότε } x=\frac{y}{2} \\ \text{όταν } x\to 0,\, y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{\frac{y}{2}} = 2\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5}{=} 2\cdot 5 = 10$$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(4x)}{x} = 20 \quad (1) \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(6x)}{x} = 30 \quad (2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(7x)}{x} = 35 \quad (3) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x} = 10 \quad (4)$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(4x)+f(6x)}{f(7x)-f(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(4x)}{x}+\frac{f(6x)}{x}}{\frac{f(7x)}{x}-\frac{f(2x)}{x}} \overset{\substack{(1),(2)\\(3),(4)}}{=} \frac{20+30}{35-10} = \frac{50}{25} = \boxed{2}$$