5.22 1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)^2-2(2x+1)-3}{(2x+1)^2-9} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=2x+1\\ \text{όταν } x\to 1,\ y\to 3}}{=} \lim_{y\to 3}\frac{y^2-2y-3}{y^2-9}=$$

$y^2-2y-3:\Delta=16\Rightarrow y_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2}\Rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{2+4}{2}\Rightarrow y_1=3 \\ y_2=\frac{2-4}{2}\Rightarrow y_2=-1 \end{cases}$

$$= \lim_{y\to 3}\frac{\cancel{(y-3)}(y+1)}{\cancel{(y-3)}(y+3)}=\frac{3+1}{3+3}=\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}^{3}}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

5.22 2)

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)^2+3(x-2)-4}{5(x-2)-5} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-2\\ \text{όταν } x\to 3,\ y\to 1}}{=} \lim_{y\to 1}\frac{y^2+3y-4}{5y-5}$$

$y^2+3y-4:\Delta=25\Rightarrow y_{1,2}=\frac{-3\pm 5}{2}\Rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{-3+5}{2}\Rightarrow y_1=1 \\ y_2=\frac{-3-5}{2}\Rightarrow y_2=-4 \end{cases}$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{\cancel{(y-1)}(y+4)}{5\cancel{(y-1)}}=\frac{1+4}{5}=\boxed{1}$$

5.22 3)

$$\lim_{x\to -1}\frac{5(x+3)^2-20}{2(x+3)-4} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x+3\\ \text{όταν } x\to -1,\ y\to 2}}{=} \lim_{y\to 2}\frac{5y^2-20}{2y-4}=\lim_{y\to 2}\frac{5(y^2-4)}{2(y-2)}=$$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{5\cancel{(y-2)}(y+2)}{2\cancel{(y-2)}}=\frac{5(2+2)}{2}=\boxed{10}$$

5.22 4)

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)^2+3(x-2)-4}{5(x-2)-5} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-2\\ \text{όταν } x\to 3,\ y\to 1}}{=} \lim_{y\to 1}\frac{y^2+3y-4}{5y-5}=$$

$y^2+3y-4:\Delta=25\Rightarrow y_{1,2}=\frac{-3\pm 5}{2}\Rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{-3+5}{2}\Rightarrow y_1=1 \\ y_2=\frac{-3-5}{2}\Rightarrow y_2=-4 \end{cases}$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{\cancel{(y-1)}(y+4)}{5\cancel{(y-1)}}=\frac{1+4}{5}=\boxed{1}$$

5.22 5)

$$\lim_{x\to -1}\frac{(5x+2)^2+4(5x+2)+3}{2(5x+2)+6} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=5x+2\\ \text{όταν } x\to -1,\ y\to -3}}{=} \lim_{y\to -3}\frac{y^2+4y+3}{2y+6}$$

$y^2+4y+3:\Delta=4\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm 2}{2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-4+2}{2}\Rightarrow x_1=-1 \\ x_2=\frac{-4-2}{2}\Rightarrow x_2=-3 \end{cases}$

$$= \lim_{y\to -3}\frac{(y+1)\cancel{(y+3)}}{2\cancel{(y+3)}}=\frac{-3+1}{2}=\boxed{-1}$$

5.22 6)

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-3)^3-2(x-3)^2+3(x-3)-2}{x-4} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x-4\\ \text{όταν } x\to 4,\ y\to 0\\ x-3=y+1}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{(y+1)^3-2(y+1)^2+3(y+1)-2}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y^3+3y^2+3y+1-2(y^2+2y+1)+3y+3-2}{y}=$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{y^3 + 3y^2 + 3y + \cancel{1} - 2y^2 - 4y - \cancel{2} + 3y + \cancel{3} - \cancel{2}}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{y^3 + y^2 + 2y}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\cancel{y}\left(y^2 + y + 2\right)}{\cancel{y}} = 0^2 + 0 + 2 = \boxed{2}$$