

5.19 1)

α) Για $x > 0$ έχουμε

$$x - x^2 \leq f(x) \leq x \quad \xRightarrow{\text{διαιρούμε με } x > 0} \frac{x - x^2}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x}{x} \Rightarrow \frac{\cancel{x}(1-x)}{\cancel{x}} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - x \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 \quad \xRightarrow{\begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \text{(κριτήριο παρεμβολής)} \end{matrix}} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1}$$

β) Για $x < 0$ έχουμε

$$x - x^2 \leq f(x) \leq x \quad \xRightarrow{\text{διαιρούμε με } x < 0} \frac{x - x^2}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{x}{x} \Rightarrow \frac{\cancel{x}(1-x)}{\cancel{x}} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - x \geq \frac{f(x)}{x} \geq 1 \quad \xRightarrow{\begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ \text{(κριτήριο παρεμβολής)} \end{matrix}} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 1}$$

γ) Από τα ερωτήματα α) και β) προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

5.19 2)

α) Για $x > 0$ έχουμε

$$x^2 + 2x \leq f(x) \leq 3x^2 + 2x \quad \xRightarrow{\text{διαιρούμε με } x > 0} \frac{x^2 + 2x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{3x^2 + 2x}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\cancel{x}(3x+2)}{\cancel{x}} \Rightarrow x+2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 3x+2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x+2) = 2$$

$$\xRightarrow{\text{(κριτήριο παρεμβολής)}} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2}$$

β) Για $x < 0$ έχουμε

$$x^2 + 2x \leq f(x) \leq 3x^2 + 2x \quad \xRightarrow{\text{διαιρούμε με } x < 0} \frac{x^2 + 2x}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{3x^2 + 2x}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{\cancel{x}(3x+2)}{\cancel{x}} \Rightarrow x+2 \geq \frac{f(x)}{x} \geq 3x+2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x+2) = 2$$

$$\xRightarrow{\text{(κριτήριο παρεμβολής)}} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 2}$$

γ) Από τα ερωτήματα α) και β) προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$

5.19 3)

α) Για $x > 1$ έχουμε

$$3x - 4 \leq f(x) \leq 2x^2 - x - 2 \quad \xRightarrow{\text{προσθέτουμε } 1} 3x - 3 \leq f(x) + 1 \leq 2x^2 - x - 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \text{διαιρούμε με } x-1 > 0 \Rightarrow \frac{3x-3}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{2x^2-x-1}{x-1} \Rightarrow \\
& 2x^2-x-1: \Delta=9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{4} \Rightarrow x_1=1 \\ x_2 = \frac{1-3}{4} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
& \Rightarrow \frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{2\cancel{(x-1)}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\cancel{x-1}} \Rightarrow \\
& \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 3 \\
& \Rightarrow 3 \leq \frac{f(x)+1}{x-1} \leq 2x+1 \quad (\text{κριτήριο παρεμβολής}) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)+1}{x-1} = 3}
\end{aligned}$$

β) Για $x < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
& 3x-4 \leq f(x) \leq 2x^2-x-2 \quad \xrightarrow{\text{προσθέτουμε 1}} \quad 3x-3 \leq f(x)+1 \leq 2x^2-x-1 \Rightarrow \\
& \text{διαιρούμε με } x-1 < 0 \Rightarrow \frac{3x-3}{x-1} \geq \frac{f(x)}{x-1} \geq \frac{2x^2-x-1}{x-1} \Rightarrow \\
& 2x^2-x-1: \Delta=9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{4} \Rightarrow x_1=1 \\ x_2 = \frac{1-3}{4} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
& \Rightarrow \frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \geq \frac{f(x)}{x-1} \geq \frac{2\cancel{(x-1)}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\cancel{x-1}} \Rightarrow \\
& \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3 \\
& \Rightarrow 3 \geq \frac{f(x)+1}{x-1} \geq 2x+1 \quad (\text{κριτήριο παρεμβολής}) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)+1}{x-1} = 3}
\end{aligned}$$

γ) Από τα ερωτήματα α) και β) προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = 3$

5.19 4)

Για $x > 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
& 5x-14 \leq f(x) \leq 3x^2-7x-2 \quad \xrightarrow{\text{προσθέτουμε 4}} \quad 5x-10 \leq f(x)+4 \leq 3x^2-7x+2 \Rightarrow \\
& \text{διαιρούμε με } x-2 > 0 \Rightarrow \frac{5x-10}{x-2} \leq \frac{f(x)+4}{x-2} \leq \frac{3x^2-7x+2}{x-2} \Rightarrow \\
& 3x^2-7x+2: \Delta=25 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+5}{6} \Rightarrow x_1=2 \\ x_2 = \frac{7-5}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \\
& \Rightarrow \frac{5\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} \leq \frac{f(x)+4}{x-2} \leq \frac{3\cancel{(x-2)}\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\cancel{x-2}} \Rightarrow \\
& \lim_{x \rightarrow 2^+} 5 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+1) = 5 \\
& \Rightarrow 5 \leq \frac{f(x)+4}{x-2} \leq 3x-1 \quad (\text{κριτήριο παρεμβολής}) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)+4}{x-2} = 5} \quad (1)
\end{aligned}$$

Ομοίως για $x < 2$ έχουμε

$$5x-14 \leq f(x) \leq 3x^2-7x-2 \quad \xrightarrow{\text{προσθέτουμε 4}} \quad 5x-10 \leq f(x)+4 \leq 3x^2-7x+2 \Rightarrow$$

$$\text{διαιρούμε με } x-2 < 0 \Rightarrow \frac{5x-10}{x-2} \geq \frac{f(x)+4}{x-2} \geq \frac{3x^2-7x+2}{x-2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 & 3x^2 - 7x + 2; \Delta = 25 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+5}{6} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{7-5}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases} \\
 & \Rightarrow \frac{5(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} \geq \frac{f(x) + 4}{x-2} \geq \frac{3(\cancel{x-2})\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\cancel{x-2}} \Rightarrow \\
 & \lim_{x \rightarrow 2^-} 5 = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x+1) = 5 \\
 & \Rightarrow 5 \geq \frac{f(x) + 4}{x-2} \geq 3x-1 \quad (\text{κριτήριο παρεμβολής}) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) + 4}{x-2} = 5} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Οπότε (1), (2) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 4}{x-2} = 5$

5.19 5)

Για $x > -1$ έχουμε

$$3x + 5 \leq f(x) \leq 4x^2 + 11x + 9 \quad \xrightarrow{\text{αφαιρούμε } 2} \quad 3x + 3 \leq f(x) - 2 \leq 4x^2 + 11x + 7 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{διαιρούμε με } +1 > 0} \Rightarrow \frac{3x+3}{x+1} \leq \frac{f(x)-2}{x+1} \leq \frac{4x^2+11x+7}{x+1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 & 4x^2 + 11x + 7; \Delta = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-11 \pm 3}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-11+3}{8} \Rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-11-3}{8} \Rightarrow x_2 = -\frac{14}{8} = -\frac{7}{4} \end{cases} \\
 & \Rightarrow \frac{3(\cancel{x+1})}{\cancel{x+1}} \leq \frac{f(x)-2}{x+1} \leq \frac{4(\cancel{x+1})\left(x + \frac{7}{4}\right)}{\cancel{x+1}} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -1^+} 3 = \lim_{x \rightarrow -1^+} (4x+7) = 3 \\
 & \Rightarrow 3 \leq \frac{f(x)-2}{x+1} \leq 4x+7 \quad (\text{κριτήριο παρεμβολής}) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)-2}{x+1} = 3} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ομοίως για $x < -1$ έχουμε

$$3x + 5 \leq f(x) \leq 4x^2 + 11x + 9 \quad \xrightarrow{\text{αφαιρούμε } 2} \quad 3x + 3 \leq f(x) - 2 \leq 4x^2 + 11x + 7 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{διαιρούμε με } +1 < 0} \Rightarrow \frac{3x+3}{x+1} \geq \frac{f(x)-2}{x+1} \geq \frac{4x^2+11x+7}{x+1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 & 4x^2 + 11x + 7; \Delta = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-11 \pm 3}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-11+3}{8} \Rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-11-3}{8} \Rightarrow x_2 = -\frac{14}{8} = -\frac{7}{4} \end{cases} \\
 & \Rightarrow \frac{3(\cancel{x+1})}{\cancel{x+1}} \geq \frac{f(x)-2}{x+1} \geq \frac{4(\cancel{x+1})\left(x + \frac{7}{4}\right)}{\cancel{x+1}} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -1^-} 3 = \lim_{x \rightarrow -1^-} (4x+7) = 3 \\
 & \Rightarrow 3 \geq \frac{f(x)-2}{x+1} \geq 4x+7 \quad (\text{κριτήριο παρεμβολής}) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-2}{x+1} = 3} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Οπότε (1), (2) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-2}{x+1} = 3$