5.14 1)

α) Είναι

$$\boxed{\lim_{x\to3^+}\frac{|x-3|+2x-6}{x^2-9}} \overset{x>3\Rightarrow|x-3|=x-3}{=} \lim_{x\to3^+}\frac{x-3+2x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to3^+}\frac{3x-9}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{3\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\frac{3}{3+3}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to3^+}\frac{|x-3|+2x-6}{x^2-9}} \overset{x<3\Rightarrow|x-3|=-x+3}{=} \lim_{x\to3^+}\frac{-x+3+2x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to3^+}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

Οπότε

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to3^+}\frac{|x-3|+2x-6}{x^2-9}&=\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to3^-}\frac{|x-3|+2x-6}{x^2-9}&=\frac{1}{6}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{\text{δεν υπάρχει το }\lim_{x\to3^+}\frac{|x-3|+2x-6}{x^2-9}}$$

β) $$\lim_{x\to-2}\frac{|x+2|+|3x+6|}{|x^2-4|}=\lim_{x\to-2}\frac{|x+2|+|3(x+2)|}{|(x-2)(x+2)|}=\lim_{x\to-2}\frac{|x+2|+3|x+2|}{|x-2||x+2|}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{4\cancel{|x+2|}}{|x-2|\,\cancel{|x+2|}}=\frac{4}{|-4|}=\boxed{1}$$

5.14 2)

Είναι $$\lim_{x\to1^+}\frac{|1-x|+x^2+x-2}{|2x-2|}\overset{\substack{|1-x|=|x-1|\\ |2x-2|=2|x-1|}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{|x-1|+x^2+x-2}{2|x-1|}$$ και

$$\lim_{x\to1^+}\frac{|x-1|+x^2+x-2}{2|x-1|}\overset{x>1\Rightarrow|x-1|=x-1}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{x-1+x^2+x-2}{2(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+2x-3}{2(x-1)}=$$

$$x^2+2x-3:\Delta=16\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm4}{2}\Rightarrow \begin{cases}x_1=\frac{-2+4}{2}\Rightarrow x_1=1\\ x_2=\frac{-2-4}{2}\Rightarrow x_2=-3\end{cases}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{2\cancel{(x-1)}}=\frac{1+3}{2}=2$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{|x-1|+x^2+x-2}{2|x-1|}\overset{x<1\Rightarrow|x-1|=1-x}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{1-\cancel{x}+x^2+\cancel{x}-2}{2(1-x)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{-2(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{-2\cancel{(x-1)}}=\frac{1+1}{-2}=-1$$

Οπότε

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\frac{|1-x|+x^2+x-2}{|2x-2|}&=2\\ \lim_{x\to1^-}\frac{|1-x|+x^2+x-2}{|2x-2|}&=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{\text{δεν υπάρχει το }\lim_{x\to1}\frac{|1-x|+x^2+x-2}{|2x-2|}}$$

5.14 3)

$$\lim_{x\to -1}\frac{|5x+5|+|x+1|}{|3x^2-3|}=\lim_{x\to -1}\frac{|5(x+1)|+|x+1|}{|3(x^2-1)|}=\lim_{x\to -1}\frac{5|x+1|+|x+1|}{3|(x-1)(x+1)|}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{6\cancel{|x+1|}}{3|x-1|\,\cancel{|x+1|}}=\frac{6}{3|-1-1|}=\boxed{1}$$

5.14 4)

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-8x+16}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{(x-4)^2}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{|x-4|}{x-4}$$

Οπότε

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{|x-4|}{x-4}\overset{x>4\Rightarrow|x-4|=x-4}{=}\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{\cancel{x-4}}{\cancel{x-4}}=1\\[2ex]\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{|x-4|}{x-4}\overset{x<4\Rightarrow|x-4|=-(x-4)}{=}\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{-(\cancel{x-4})}{\cancel{x-4}}=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\text{δεν υπάρχει το }\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-8x+16}}{x-4}}$$

5.14 5)

$$\lim_{x\to 5}\frac{|x^2-25|-\sqrt{x^2-10x+25}}{|3x-15|}=\lim_{x\to 5}\frac{|(x-5)(x+5)|-\sqrt{(x-5)^2}}{|3(x-5)|}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{|x-5||x+5|-|x-5|}{3|x-5|}=\lim_{x\to 5}\frac{\cancel{|x-5|}\,(|x+5|-1)}{3\cancel{|x-5|}}=\frac{|5+5|-1}{3}=\frac{9}{3}=3$$

5.14 6)

Είναι

$$\lim_{x\to 2}\frac{|4-x^2|+3x-6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|(2-x)(2+x)|+3x-6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|2-x||2+x|+3x-6}{x^2-x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{|2-x||2+x|+3x-6}{x^2-x-2}\overset{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4>0\Rightarrow|x+2|=x+2,\ |2-x|=|x-2|}{=}\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|(x+2)+3x-6}{x^2-x-2}\ \text{και}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|(x+2)+3x-6}{x^2-x-2}\overset{x>2\Rightarrow|x-2|=x-2}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)+3x-6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4+3x-6}{x^2-x-2}$$

$$x^2+3x-10:\Delta=49\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm 7}{2}\Rightarrow \begin{array}{l}\nearrow x_1=\frac{-3+7}{2}\Rightarrow x_1=2\\ \searrow x_2=\frac{-3-7}{2}\Rightarrow x_2=-5\end{array}$$

$$x^2-x-2:\Delta=9\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow \begin{array}{l}\nearrow x_1=\frac{1+3}{2}\Rightarrow x_1=2\\ \searrow x_2=\frac{1-3}{2}\Rightarrow x_2=-1\end{array}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\frac{2+5}{2+1}=\frac{7}{3}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|(x+2)+3x-6}{x^2-x-2}\overset{x<2\Rightarrow|x-2|=-(x-2)}{=}\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+2)+3x-6}{x^2-x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+4+3x-6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+3x-2}{x^2-x-2}=$$

$$-x^2+3x-2:\Delta=1\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm 1}{-2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-3+1}{-2}\Rightarrow x_1=1 \\ x_2=\frac{-3-1}{-2}\Rightarrow x_2=2 \end{cases}$$

$$x^2-x-2:\Delta=9\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1+3}{2}\Rightarrow x_1=2 \\ x_2=\frac{1-3}{2}\Rightarrow x_2=-1 \end{cases}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\frac{-(2-1)}{2+1}=-\frac{1}{3}$$

Οπότε

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+}\frac{|4-x^2|+3x-6}{x^2-x-2}&=\frac{7}{3} \\ \lim_{x\to 2^-}\frac{|4-x^2|+3x-6}{x^2-x-2}&=-1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\text{δεν υπάρχει το } \lim_{x\to 1}\frac{|4-x^2|+3x-6}{x^2-x-2}}$$

5.14 7)

$$\lim_{x\to -2}\frac{|x^2+3x+2|+|x^2-4|}{|2x+4|}\overset{x^2+3x+2:\Delta=1\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm1}{2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-3+1}{2}\Rightarrow x_1=-1 \\ x_2=\frac{-3-1}{2}\Rightarrow x_2=-2\end{cases}}{=}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{|(x+1)(x+2)|+|(x-2)(x+2)|}{|2(x+2)|}=\lim_{x\to -2}\frac{|x+1||x+2|+|x-2||x+2|}{2|x+2|}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{|x+2|}\left(|x+1|+|x-2|\right)}{2\cancel{|x+2|}}=\frac{|-2+1|+|-2-2|}{2}=\boxed{\frac{5}{2}}$$

5.14 8)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^4-2x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+1}}{|x^2+x-2|}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(x^2-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}}{|(x-1)(x+2)|}=$$

$$x^2+x-2:\Delta=9\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1-3}{2}\Rightarrow x_1=-2 \\ x_2=\frac{-1+3}{2}\Rightarrow x_2=1 \end{cases}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|+|x-1|}{|(x-1)(x+2)|}=\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|+|x-1|}{|(x-1)(x+2)|}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1||x+1|+|x-1|}{|x-1||x+2|}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{|x-1|}\left(|x+1|+1\right)}{\cancel{|x-1|}|x+2|}=\lim_{x\to 1}\frac{|1+1|+1}{1+2}=\frac{3}{3}=1$$

5.14 9)

Είναι

$$\lim_{x\to 3}\frac{|x^3-2x^2-5x+6|+3-x}{x^2+x-12}\overset{x^3-2x^2-5x+6\begin{cases}\text{ρίζα το } x=3\\ \text{παραγοντοποίηση με Horner}\end{cases}}{\Rightarrow}=\lim_{x\to 3}\frac{|(x-3)(x^2+x-2)|+3-x}{x^2+x-12}=$$

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2+x-2\right)=10>0$$

$$x^2+x-12:\Delta=49\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1+7}{2}\Rightarrow x_1=3 \\ x_2=\frac{-1-7}{2}\Rightarrow x_2=-4 \end{cases}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|\left|x^2+x-2\right|+3-x}{x^2+x-12}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|\left(x^2+x-2\right)-(x-3)}{(x-3)(x+4)} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x-3|\left(x^2+x-2\right)-(x-3)}{(x-3)(x+4)}\overset{x>3\Rightarrow|x-3|=x-3}{=}\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)\left(x^2+x-2\right)-(x-3)}{(x-3)(x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}\left[\left(x^2+x-2\right)-1\right]}{\cancel{(x-3)}(x+4)}=\frac{3^2+3-2-1}{3+4}=\frac{9}{7}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|\left(x^2+x-2\right)-(x-3)}{(x-3)(x+4)}\overset{x<3\Rightarrow|x-3|=-(x-3)}{=}\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)\left(x^2+x-2\right)-(x-3)}{(x-3)(x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{\cancel{(x-3)}\left[-\left(x^2+x-2\right)-1\right]}{\cancel{(x-3)}(x+4)}=\frac{-\left(3^2+3-2\right)-1}{3+4}=\frac{-11}{7}$$

Οπότε

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 3^+}\frac{\left|x^3-2x^2-5x+6\right|+3-x}{x^2+x-12}=\frac{9}{7} \\ &\lim_{x\to 3^-}\frac{\left|x^3-2x^2-5x+6\right|+3-x}{x^2+x-12}=-\frac{11}{7} \end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\text{δεν υπάρχει το } \lim_{x\to 3}\frac{\left|x^3-2x^2-5x+6\right|+3-x}{x^2+x-12}}$$