

4.7 1)

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{υψώνουμε στον κύβο}} x_1^3 < x_2^3 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -2} -2x_1^3 > -2x_2^3 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -3} -3x_1 > -3x_2 \xRightarrow{e^x \nearrow} e^{-3x_1} > e^{-3x_2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$\begin{aligned} -2x_1^3 + e^{-3x_1} &> -2x_2^3 + e^{-3x_2} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε } 1} -2x_1^3 + e^{-3x_1} + 1 > -2x_2^3 + e^{-3x_2} + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα είναι και 1 – 1

4.7 2)

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (1). Τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$x_1 + \ln x_1 < x_2 + \ln x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι και 1 – 1

4.7 3)

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -1} -x_1 > -x_2 \quad (1)$$

Ακόμη

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{e^x \nearrow} e^{x_1} > e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$-x_2 - e^{x_1} > -x_2 - e^{x_2} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε } 5} -x_2 - e^{x_1} + 5 > -x_2 - e^{x_2} + 5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα είναι και 1 – 1

4.7 4)

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -3} -3x_1 > -3x_2 \quad (1)$$

Ακόμη

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -1} -x_1 > -x_2 \xRightarrow{e^x \nearrow} e^{-x_1} > e^{-x_2} \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } 2} 2e^{-x_1} > 2e^{-x_2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2e^{-x_1} &> -3x_2 + 2e^{-x_2} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε } 4} -3x_1 + 2e^{-x_1} + 4 > -3x_2 + 2e^{-x_2} + 4 \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα είναι και 1 – 1

4.7 5)

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{υψώνουμε στην } 5\eta} x_1^5 < x_2^5 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } 2} 2x_1^5 < 2x_2^5 \quad (1)$$

Ακόμη

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} < \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$2x_1^5 + \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} < 2x_2^5 + \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2} \xrightarrow{\text{αφαιρούμε 9}} 2x_1^5 + \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} - 9 < 2x_2^5 + \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2} - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι και $1 - 1$