

$$\alpha) \text{ Αν } \boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow \begin{cases} f^3(x_1) = f^3(x_2) \\ 2f(x_1) = 2f(x_2) \end{cases} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} \Rightarrow$$

$$f^3(x_1) + 2f(x_1) = f^3(x_2) + 2f(x_2) \xRightarrow{\substack{f^3(x) + 2f(x) - 4x = 0 \Rightarrow \\ f^3(x) + 2f(x) = 4x}} 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι 1-1

$$\beta) f^3(x) + 2f(x) - 4x = 0 \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)} f^3(f^{-1}(x)) + 2f(f^{-1}(x)) - 4f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{f(f^{-1}(x))=x} x^3 + 2x - 4f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 2x = 4f^{-1}(x) \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 2x}{4}}$$

$$\gamma) f^3(x) + 2f(x) - 4x = 0 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=0} f^3(0) + 2f(0) - 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f^3(0) + 2f(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0)[f^2(0) + 2] = 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 0} \text{ ή } f^2(0) = -2 \text{ αδύνατο}$$

$$\text{Άρα } f(0) = 0$$

Ακόμη

$$f^3(x) + 2f(x) - 4x = 0 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x = \frac{3}{4}} f^3\left(\frac{3}{4}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) - \cancel{4} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^3\left(\frac{3}{4}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) - 3 = 0 \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } y = f\left(\frac{3}{4}\right)} y^3 + 2y - 3 = 0 \xRightarrow{\text{παραγοντοποίηση με Horner προφανής ρίζα το 1}}$$

$$\Rightarrow (y-1)(y^2 + y + 3) = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ή } y^2 + y + 3 = 0, \Delta = -11 < 0$$

$$\text{Άρα } y = 1 \text{ και άρα } \boxed{f\left(\frac{3}{4}\right) = 1}$$

δ) Έστω A ένα κοινό σημείο της C_f και της $y = x$. Τότε επειδή το A ανήκει στην $y = x$ θα είναι $A(x_0, x_0)$. Οπότε επειδή $A \in C_f$ θα είναι $\boxed{f(x_0) = x_0}$. Τότε

$$f^3(x) + 2f(x) - 4x = 0 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f^3(x_0) + 2f(x_0) - 4x_0 = 0 \xRightarrow{f(x_0)=x_0}$$

$$\Rightarrow x_0^3 + 2x_0 - 4x_0 = 0 \Rightarrow x_0^3 - 2x_0 = 0 \Rightarrow x_0(x_0^2 - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x_0 = 0} \text{ ή } \boxed{x_0 = -\sqrt{2}} \text{ ή } \boxed{x_0 = \sqrt{2}}$$

Οπότε τα κοινά σημεία είναι τα $(0,0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$