

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) + f^{-1}(x) = x \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(x)} f(f(x)) + f^{-1}(f(x)) = f(x) \quad \xRightarrow{f^{-1}(f(x))=x} \\ \Rightarrow f(f(x)) + x = f(x) \Rightarrow f(f(x)) = f(x) - x \quad (1)$$

Ακόμη

$$(1) \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(x)} f(f(f(x))) = f(f(x)) - f(x) \xRightarrow{(1)} f(f(f(x))) = \cancel{f(x)} - x - \cancel{f(x)} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(f(f(x))) = -x \quad (2)$$

Τέλος

$$\left. \begin{array}{l} (2) \quad \xRightarrow{\text{"εξάγουμε"}} f(f(f(f(x)))) = f(-x) \\ (2) \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(x)} f(f(f(f(x)))) = -f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f(-x) = -f(x)} \text{ και άρα η } f \text{ είναι}$$

περιττή