# 4.30

**α)** $f(x)\cdot f(2-x)=f(\lambda x+5)\overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)\cdot f(2-0)=f(\lambda\cdot 0+5)\Rightarrow f(0)\cdot f(2)=f(5)$ (1)

$f(x)\cdot f(2-x)=f(\lambda x+5)\overset{x=2}{\Rightarrow} f(2)\cdot f(2-2)=f(\lambda\cdot 2+5)\Rightarrow f(2)\cdot f(0)=f(2\lambda+5)$
(2)

Οπότε

$(1),(2)\Rightarrow f(5)=f(2\lambda+5)\overset{f:1-1}{\Rightarrow} \cancel{5}=2\lambda+\cancel{5}\Rightarrow 2\lambda=0\Rightarrow \boxed{\lambda=0}$

**β)** Αφού είναι $\lambda=0$ η σχέση $f(x)\cdot f(2-x)=f(\lambda x+5)$ γίνεται
$f(x)\cdot f(2-x)=f(5)$

Επομένως

$f(x)\cdot f(2-x)=f(5)\overset{x=5}{\Rightarrow} f(5)\cdot f(2-5)=f(5)\Rightarrow f(5)\cdot f(-3)=f(5)$ (3)

Θα αποδείξουμε ότι $f(5)\neq 0$

Πράγματι έστω $f(5)=0$. Τότε

$f(x)\cdot f(2-x)=f(5)\Rightarrow f(x)\cdot f(2-x)=0\overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)\cdot f(2-0)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow f(0)\cdot f(2)=0\Rightarrow f(0)=0$ ή $f(2)=0\Rightarrow f(0)=f(5)$ ή $f(2)=f(5)$

άτοπο διότι η f είναι 1-1

Άρα $f(5)\neq 0$ επομένως

$(3)\overset{f(5)\neq 0}{\Rightarrow} \cancel{f(5)}\cdot f(-3)=\cancel{f(5)}\Rightarrow \boxed{f(-3)=1}$