

α) Είναι

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } 1} f(f(1)) = 1^2 - 1 + 1 \Rightarrow f(f(1)) = 1 \quad (1)$$

Ακόμη

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(1)} f(f(f(1))) = f^2(1) - f(1) + 1 \xrightarrow{(1)}$$

$$\Rightarrow f(1) = f^2(1) - f(1) + 1 \Rightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \Rightarrow [f(1) - 1]^2 = 0 \Rightarrow \boxed{f(1) = 1}$$

β) Έχουμε

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } 0} f(f(0)) = 0^2 - 0 + 1 \Rightarrow f(f(0)) = 1 \quad (2)$$

Ακόμη

$$f(f(0)) = 0^2 - 0 + 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(0)} f(f(f(0))) = f^2(0) - f(0) + 1 \xrightarrow{(2)}$$

$$\Rightarrow f(1) = f^2(0) - f(0) + 1 \xrightarrow{f(1)=1} 1 = f^2(0) - f(0) + 1 \Rightarrow f(0)[f(0) - 1] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f(0)=0} \text{ ή } \underline{f(0)=1}$$

Όμως, αν $f(0)=0$, τότε από την σχέση (2) προκύπτει

$$f(f(0)) = 1 \xrightarrow{f(0)=0} f(0) = 1 \xrightarrow{f(0)=0} 0 = 1 \text{ άτοπο}$$

Άρα υποχρεωτικά θα είναι $\boxed{f(0) = 1}$

γ) Παρατηρούμε ότι

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= 0^2 - 0 \cdot f(0) + 1 \Rightarrow g(0) = 1 \\ g(1) &= 1^2 - 1 \cdot f(1) + 1 \xrightarrow{f(1)=1} g(1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(0) = g(1)$$

Άρα η g δεν είναι 1-1

δ) Παρατηρούμε ότι

$$\left. \begin{aligned} h(x) &= 2e^{x^2+x} - f(x+1) \Rightarrow h(0) = 2e^{0^2+0} - f(0+1) \xrightarrow{f(1)=1} h(0) = 2e - 1 \\ h(x) &= 2e^{x^2+x} - f(x+1) \Rightarrow h(-1) = 2e^{(-1)^2-1} - f(-1+1) \xrightarrow{f(0)=1} h(-1) = 2e - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(0) = h(-1)$$

Άρα η h δεν είναι 1-1