

4.23

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχτεί ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη

Έστω ότι η f είναι αντιστρέψιμη. Τότε θα είναι $\boxed{f(0) \neq f(1)}$. Όμως

$$\left. \begin{array}{l} f(f(x)) = 1 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=0} f(f(0)) = 1 \\ f(f(x)) = 1 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1} f(f(1)) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(f(0)) = f(f(1)) \xRightarrow{f^{-1}} \boxed{f(0) = f(1)} \text{ \textcolor{red}{άτοπο}}$$

Άρα η f δεν είναι αντιστρέψιμη