4.21

α) Αν $\boxed{f(x_1)=f(x_2)} \Rightarrow \begin{cases} e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)} \\ f^3(x_1)=f^3(x_2) \Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2) \end{cases}$ προσθέτουμε κατά μέλη $\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{f(x_1)}+2f^3(x_1)=e^{f(x_2)}+2f^3(x_2)$ $e^{f(x)}+2f^3(x)-x+1=0 \Rightarrow e^{f(x)}+2f^3(x)=x-1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1-1=x_2-1 \Rightarrow \boxed{x_1=x_2}$

β) $e^{f(x)}+2f^3(x)-x+1=0$ θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ $\Rightarrow$ $e^{f\left(f^{-1}(x)\right)}+2f^3\left(f^{-1}(x)\right)-f^{-1}(x)+1=0$ $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow e^x+2x^3-f^{-1}(x)+1=0 \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=e^x+2x^3+1}$